Eksamen i Calculus

Tirsdag den 11. juni 2013

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMER: ______________________________

HOLD NUMMER:
- ☐ Hold 1 (v. Lisbeth Fajstrup)
- ☐ Hold 2 (v. Nikolaj Hess-Nielsen)
- ☐ Hold 4 (v. Morten Nielsen)

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (12%)

(a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

$y(x) = C_1 e^{t} \cos 2t + C_2 e^{t} \sin 2t,$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

(b) Find den fuldstændige løsning til den inhomogene differentialligning

$$y'' - 2y' + 5y = 5t.$$

$y(x) = C_1 e^{t} \cos 2t + C_2 e^{t} \sin 2t + \quad + \frac{2}{5}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Opgave 2 (7%)

Bestem Taylorpolynomiet af 4. grad for

$$f(x) = \cos(2x),$$

med udviklingspunkt $a = 0$.

$P_4(x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4.$

Opgave 3 (8%)

En flade $\mathscr{F}$ er givet implicit som løsningsmængden til ligningen

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9.$$

(a) Verificer, at punktet $P(2, -1, -1)$ ligger på $\mathscr{F}$.

$2^2 + 2(-1)^2 + 3(-1)^2 = 9$ ✓.

(b) Bestem en ligning for tangentplanen til $\mathscr{F}$ i punktet $P(2, -1, -1)$.

$\nabla(F-9) = \langle 2x, 4y, 6z \rangle, \quad \nabla(F-9)\big|_{(2,-1,-1)} = \langle 4, -4, -6 \rangle$

TP: $4(x-2) - 4(y+1) - 6(z+1) = 0.$

Opgave 4 (8%)

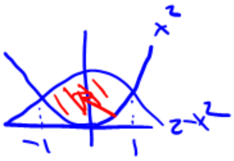
Find samtlige komplekse løsninger til den binome ligning

$$z^5 + i = 0. \quad \Rightarrow z^5 = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Løsningsmængden må gerne angives på polær form.

$$z = \{1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{10} + i\frac{2\pi}{5}\cdot p} \mid p = 0, 1, \dots, 4\}.$$

Opgave 5 (16%)



(a) Området $\mathscr{R}$ i xy-planen er afgrænset af kurverne $y = x^2$ og $y = 2 - x^2$. Skitsér $\mathscr{R}$.

(b) Beregn planintegralet af $f(x, y) = x^2$ over området $\mathscr{R}$. $\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{2-x^2} x^2 \, dy\,dx = \frac{8}{15}.$

(c) Et legeme T med massetæthed $\delta(x, y, z) = z$ dækker netop området i rummet givet ved

$$\{(x, y, z) : (x, y) \in \mathscr{R}, 0 \le z \le x^2\}.$$

Udregn T's masse.

$$m = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{2-x^2}\int_0^{x^2} z \, dz\,dy\,dx = \frac{4}{35}.$$

Opgave 6 (8%)

Betragt funktionen

$$f(x, y, z) = \sin(\pi x) + xy^2z^5, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x, y, z)$. $= \langle \pi\cos(\pi x) + y^2z^5, \; 2xyz^5, 5xy^2z^4 \rangle$

(b) Find den retningsafledede af f i punktet $P(-1/2, 1, -1)$ i retningen givet ved

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}. \qquad \bar{u} = \frac{\bar{v}}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{\bar{v}}{3}$$

$$\nabla f(-\tfrac{1}{2}, 1, -1) = \langle -1, 1, -\tfrac{5}{2} \rangle$$

$$D_{\bar{u}} f(-\tfrac{1}{2}, 1, -1) = \langle -1, 1, -\tfrac{5}{2} \rangle \cdot \frac{\langle 1, 2, -2 \rangle}{3} = \frac{-1 + 2 + 5}{3} = 2.$$

Opgave 7 (5%)

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \arcsin(x^2 + y^2).$$

(a) Bestem definitionsmængden for f. $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}.$

(b) Bestem de partielle afledede $f_x(x,y)$ og $f_y(x,y)$.

$$f_x = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}, \quad f_y = \frac{2y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}.$$

Opgave 8 (8%)

Betragt den parametriske kurve givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \cos(2t)\,\mathbf{i} + \sin(2t)\,\mathbf{j} + 2\sqrt{3}\,t\,\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ 2\sqrt{3}\,t \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Beregn kurvens buelængde fra $t = 0$ til $t = 2$.

$$s = \int_0^2 \sqrt{(-2\sin 2t)^2 + (2\cos 2t)^2 + (2\sqrt{3})^2}\, dt$$

$$= \int_0^2 \sqrt{4+12}\, dt = 2 \cdot 4 = 8.$$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Bemærkning. I opgaverne 9–12 evalueres der efter følgende princip: hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning. Man får derfor *intet* ud af "helgarderinger".

Opgave 9 (6%)

Et legeme T dækker præcis området i rummet givet ved

$$\{(x,y,z): \quad (x,y) \in R, x^2 \le z \le 2x^2+y^2\},$$

hvor

$$R = \{(x,y): \quad -1 \le y \le 2, 1-y^2 \le x \le 1+y^2\}.$$

Massetætheden (densiteten) for T er $\delta(x,y,z) = z$. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor (bemærk: integralerne skal **ikke** evalueres).

- ☐ T's masse kan udregnes som følger: $m = \int_{-1}^{2}\int_{1-y^2}^{1+y^2}\int_{x^2}^{2x^2+y^2} x^2 z\,dz\,dx\,dy$
- ☒ T's volumen kan udregnes som følger: $V = \int_{-1}^{2}\int_{1-y^2}^{1+y^2}\int_{x^2}^{2x^2+y^2} dz\,dx\,dy$
- ☐ T's masse kan udregnes som følger: $m = \int_{-1}^{2}\int_{1-y^2}^{1+y^2}\int_{x^2}^{2x^2+y^2} z\,dy\,dz\,dx$
- ☐ T's volumen kan udregnes som følger: $V = \int_{-1}^{2}\int_{1-y^2}^{1+y^2}\int_{x^2}^{2x^2+y^2} dz\,dy\,dx$
- ☒ T's masse kan udregnes som følger: $m = \int_{-1}^{2}\int_{1-y^2}^{1+y^2}\int_{x^2}^{2x^2+y^2} z\,dz\,dx\,dy$

Opgave 10 (5%)

Lad $f(x,y)$ være en kontinuert reel funktion defineret på et område R i planen. R består af punkterne på og indenfor en simpel lukket kurve C. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor.

- ☒ f har altid et globalt maksimum på R.
- ☒ Hvis f *ikke* har et globalt ekstremum på C, så har f et globalt ekstremum *indenfor* C.
- ☐ Hvis f har vandret tangentplan i punktet $\mathbf{a} \in R$, så har f et lokalt ekstremum i $\mathbf{a}$.
- ☐ Hvis f har et lokalt ekstremum i $\mathbf{a} \in R$, så eksisterer alle retningsafledede for f i $\mathbf{a}$.

Opgave 11 (10%).

Besvar følgende 6 sand/falsk opgaver:

a. En differentiabel kurve $\mathbf{r} : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ opfylder, at $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t) = 1$ for $t \in (a,b)$. Da gælder, at

$$\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}(t) = 0, \qquad t \in (a,b).$$

☒ Sand ☐ Falsk

b. For et komplekst tal $w \neq 0$ gælder, at

$$\frac{1}{w} = \frac{\overline{w}}{|w|^2}.$$

☒ Sand ☐ Falsk

c. Følgende ligning gælder for den inverse sinus funktion:

$$\arcsin(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \qquad x \in (-1,1).$$

☐ Sand ☒ Falsk

d. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaldes surjektiv (på) hvis $f(x_1) = f(x_2)$ medfører, at $x_1 = x_2$, hvor $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

☐ Sand ☒ Falsk

e. Der gælder, at

$$\tan\big(\arctan(x)\big) = x$$

for *alle* $x \in \mathbb{R}$.

☒ Sand ☐ Falsk

f. Der gælder, at

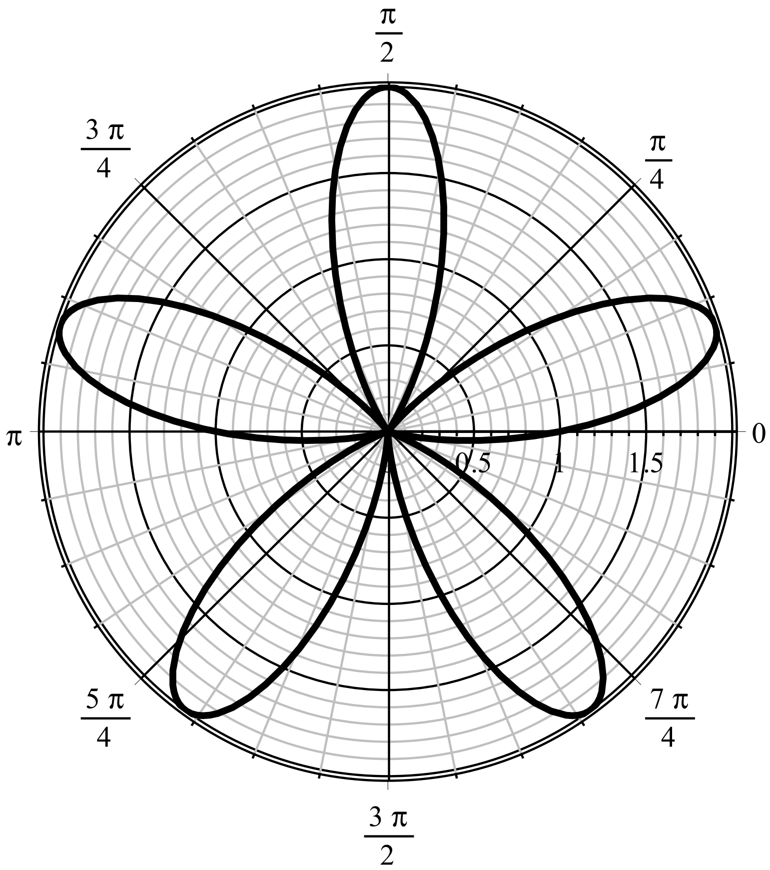
$$\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

for *alle* $x \in \mathbb{R}$.

☐ Sand ☒ Falsk

Opgave 12 (7%)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen $r = f(\theta)$ afbildet i polære koordinater.



Hvilken (hvilke) af nedenstående forskrifter for f, samt tilhørende definitionsmængde for θ, svarer til ovenstående figur.

- ☐ $f(\theta) = 1 + \cos(4\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 1 - \cos(7\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi$
- ☐ $f(\theta) = 2 + \cos(5\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☒ $f(\theta) = 1 + \sin(5\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 2 + \sin(5\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = \cos(5\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi.$