Eksamen i Calculus

Mandag den 4. juni 2012

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: _____

STUDIENUMMMER: _____

HOLD NUMMER: ☐ Hold 1 (v. Jacob Broe)
☐ Hold 2 (v. Morten Nielsen og Mikkel Brynildsen)
☐ Hold 4 (v. Bo Rosbjerg)

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8%)

En flade $\mathscr{F}$ er givet implicit som løsningsmængden til ligningen

$$F(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^4 - 3 = 0.$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla F(x, y, z)$.

$\nabla F(x,y,z) = 3x^2 \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} + 4z^3 \cdot \vec{k}$

(b) Bestem en ligning for tangentplanen til $\mathscr{F}$ gennem punktet $(1, -1, -1)$.

$3x - 2y - 4z - 9 = 0$

Opgave 2 (16%)

(a) Find den entydigt bestemte løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0,$$

som opfylder, at

$$y(0) = 0 \quad \text{og} \quad y'(0) = 3.$$

$y(x) = e^{2x} - e^{-x}$

(b) Find en partikulær løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 1.$$

$y_p(x) = -\frac{1}{2}$

(c) Det oplyses, at

$$y_p(x) = \cos x - 3\sin x$$

er en partikulær løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 10\sin x.$$

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 1 + 30\sin x.$$

$y(x) = c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} + 3\cos(x) - 9\sin(x)$

Opgave 3 (8%)

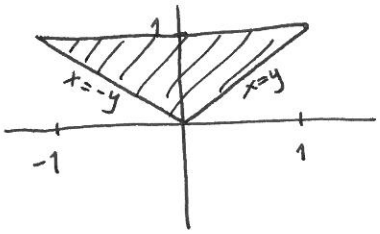
Løs den komplekse andengradsligning

$$z^2 + (1+i)z + 2 - i = 0.$$

$$z = \begin{cases} -1-2i \\ i \end{cases}$$

Opgave 4 (9%)

(a) Området $\mathscr{R}$ i xy-planen dækker netop trekanten med hjørnerne $(-1,1)$, $(0,0)$ og $(1,1)$. Skitsér $\mathscr{R}$.



(b) Find plantintegralet af $f(x,y) = 3y$ over området $\mathscr{R}$.

$$\int_0^1 \int_{-y}^{y} 3y\,dx\,dy = 2$$

Opgave 5 (7%)

(a) Angiv Taylorpolynomiet af 2. grad for

$$f(x) = 1 + 4x + 8x^2 + 12x^3,$$

med udviklingspunkt $a = 0$.

$$P_2(x) = 1 + 4x + 8x^2$$

(b) Det oplyses, at den 6 gange kontinuert differentiable funktion $g(x)$ har følgende Taylorpolynomium af 2. grad

$$P_2(x) = 1 + 2(x-1) + 4(x-1)^2$$

med udviklingspunktet $a = 1$. Angiv $g''(1)$.

$$g''(1) = 8$$

Opgave 6 (10%)

En tynd plade dækker netop området

$$\mathscr{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$$

i xy-planen. Pladen har massetæthed (densitet) $\delta(x, y) = x$.

(a) Bestem pladens masse. $m = \frac{14}{3}$

Lad $(\bar{x}, \bar{y})$ betegne pladens massemidtpunkt. En udregning viser, at $\bar{x} = \frac{45\pi}{112}$.

(b) Beregn $\bar{y}$. $\bar{y} = 0$

Opgave 7 (5%)

Betragt funktionen

$$f(x, y) = \arctan(x^2 + y^3).$$

(a) Bestem definitionsmængden for f. $\{x, y\} \in \mathbb{R}^2$

(b) Bestem de partielle afledede $f_x(x, y)$ og $f_y(x, y)$.

$$f_x(x,y) = 2x \cdot \frac{1}{1+(x^2+y^3)^2}$$

$$f_y(x,y) = 3y^2 \frac{1}{1+(x^2+y^3)^2}$$

Opgave 8 (5%)

Betragt den plane kurve givet ved

$$x = t$$
$$y = \sin t,$$

hvor $t \in \mathbb{R}$. Beregn kurvens krumningen $\kappa(t)$ for $t = \frac{3\pi}{4}$.

$$\kappa(t) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Bemærkning. I opgaverne 9–12 evalueres der efter følgende princip: hver forkert afkrydsning ophæver én rigtigt afkrydsning. Man får derfor *intet* ud af "helgarderinger".

Opgave 9 (6%)

Et legeme T dækker det område i rummet som i sfæriske koordinater er givet ved

$$\{(\rho, \phi, \theta): \quad 0 \le \phi \le \pi/6, \quad 0 \le \rho \le \pi/8\}.$$

Massetætheden (densiteten) for T er $\delta(x, y, z) = y^2$. Hvilke(t) af nedenstående 4 itererede integraler kan benyttes til at bestemme T's masse (bemærk: værdierne af integralerne skal *ikke* udregnes.)

☐ $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/8} \rho^3 \sin\theta \sin^2\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$

☐ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/8} \rho^3 \sin\theta \sin^2\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$

☒ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/8} \rho^4 \sin^2\theta \sin^3\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$

☐ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/8} \rho^4 \sin^3\theta \sin^2\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$

Opgave 10 (5%)

Betragt to komplekse tal $c_1 = a_1 + ib_1$ og $c_2 = a_2 + ib_2$, hvor $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor.

☐ $c_1 c_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_1 b_1 + b_1 a_2)$.

☐ $c_1 = \overline{c_1}$, hvis og kun hvis, $a_1 = 0$.

☒ $\dfrac{c_1}{c_2}$ er defineret hvis $a_2^2 + b_2^2 > 0$.

☒ Ligningen i z givet ved $z^2 + c_1 = z - c_2$ har præcis to komplekse løsninger regnet med multiplicitet.

Opgave 11 (14%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

a. Betragt en kontinuert funktion f defineret på et område $\mathscr{R}$ i planen, hvor $\mathscr{R}$ er givet i polære koordinater ved

$$\mathscr{R} = \{(r,\theta)_{\text{pol}} : r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta\},$$

hvor r_1 og r_2 er kontinuerte funktioner og $\alpha \le \beta$ er konstanter. Det tilhørende planintegral kan evalueres som følgende itererede integral

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r\,dr\,d\theta.$$

☒ Sand ☐ Falsk

b. En kontinuert funktion defineret på et område $\mathscr{R}$ i xy-planen, hvor $\mathscr{R}$ består af punkterne på og indenfor en simpel lukket kurve, har altid et globalt minimum på $\mathscr{R}$.

☒ Sand ☐ Falsk

c. Betragt en differentiabel funktion $f(x,y)$ defineret på $\mathbb{R}^2$. Hvis alle retningsafledede for f i punktet $(0,0)$ antager værdien 0, da har f et lokalt maksimum i $(0,0)$.

☐ Sand ☒ Falsk

d. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaldes injektiv (one-to-one) hvis $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ for $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

☐ Sand ☒ Falsk

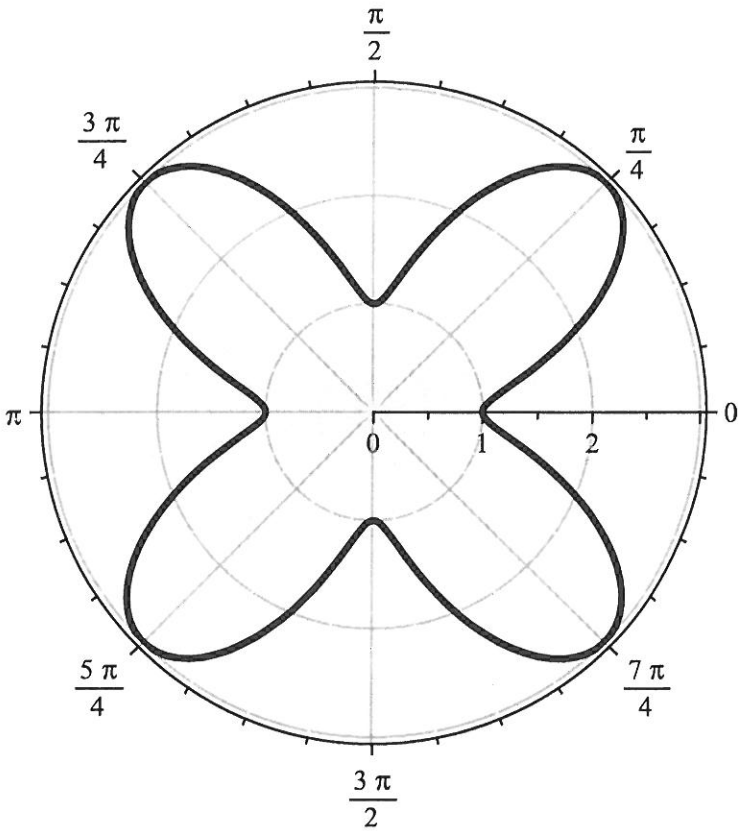
e. Der gælder, at

$$\frac{d}{dx}\big(\arcsin x + \arccos x\big) = 0, \qquad x \in (-1,1).$$

☒ Sand ☐ Falsk

Opgave 12 (7%)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen $r = f(\theta)$ afbildet i polære koordinater.



Hvilken (hvilke) af nedenstående forskrifter for f, samt tilhørende definitionsmænge for θ, svarer til ovenstående figur.

- ☐ $f(\theta) = 1 + \cos(4\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 2 - \cos(2\theta),\ 0 \le \theta \le \pi$
- ☐ $f(\theta) = 2 + \sin(4\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$
- ☒ $f(\theta) = 2 - \cos(4\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 1 + 2\cos(2\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \cos(2\theta),\ 0 \le \theta \le \pi.$