Reeksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design,
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

19. august 2019

Opgave 1 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$$

for reelle variable x, y og z.

(a) (3 point) Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x, y, z) der opfylder

- ☐ $z = 0$
- ☐ $x^2 + y^2 + z^2 > 0$
- ☐ $x^2 + y^2 + z^2 < 0$
- ☑ alle punkterne er tilladte
- ☐ $xyz \neq 0$
- ☐ ingen af de andre

(b) (3 point) Hvilke punkter (x, y, z) ligger på niveauoverfladen $f(x, y, z) = 2$?

- ☐ En sfære givet ved $x^2 + y^2 + z^2 = \sin^{-1}(2)$
- ☐ xy-planen
- ☑ Ingen punkter opfylder ligningen
- ☐ En plan parallel med xy-planen givet ved $z = \sin^{-1}(2)$
- ☐ ingen af de andre

Opgave 2 (6 point)

En parametrisk kurve i rummet er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \langle \sin(t),\ \cos(t),\ t \rangle$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (2 point) Hvad er kurvens hastighedsvektor?

- ☐ $\langle \sin(t), \cos(t), 1 \rangle$
- ☐ $\langle \cos(t), \sin(t), 1 \rangle$
- ☑ $\langle \cos(t), -\sin(t), 1 \rangle$
- ☐ $\langle \sin(t^2/2), \cos(t^2/2), t^2/2 \rangle$
- ☐ $\langle \sin(t^2/2), -\cos(t^2/2), t^2/2 \rangle$
- ☐ ingen af de andre

(b) (2 point) Hvilken af de følgende vektorer er kurvens accelerationsvektor for $t = 2\pi$?

- ☑ $\langle 0,\ -1,\ 0\rangle$
- ☐ $\langle 1,\ 0,\ 0\rangle$
- ☐ $\langle 0,\ 1,\ 1/2\rangle$
- ☐ $\langle 0,\ 1,\ 0\rangle$
- ☐ $\langle 1,\ 1,\ 1\rangle$
- ☐ ingen af de andre

(c) (1 point) Hvad er kurvens fart?

- ☐ $\sqrt{\sin(t)+\cos(t)+t}$
- ☐ 2
- ☐ $\sqrt{t+1}$
- ☐ $\sqrt{1+t^2}$
- ☑ $\sqrt{2}$
- ☐ ingen af de andre

(d) (1 point) Hvad er kurvens længde fra $t = 0$ til $t = 2$?

- ☐ 0
- ☑ $2\sqrt{2}$
- ☐ $1/2$
- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ $4\sqrt{2}$
- ☐ ingen af de andre

Opgave 3 (6 point)

Tre komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 1+2i, \quad z_2 = 4-2i \quad \text{og} \quad z_3 = i^{100}.$$

(a) (2 point) Hvad er $z_1 + z_2$ på polær form?

- ☐ 1
- ☐ $5e^{-i\pi/2}$
- ☑ 5
- ☐ $5e^{i\pi/2}$
- ☐ $\sqrt{5}$
- ☐ ingen af de andre

(b) (2 point) Hvad er $\frac{2z_1}{z_2}$ på standardformen $a+ib$?

- ☐ $1+i$
- ☐ $-1-i$
- ☐ 5
- ☑ i
- ☐ $-i$
- ☐ ingen af de andre

(c) (2 point) Hvad er hovedargumentet for z_3?

- ☑ 0
- ☐ $\pi/2$
- ☐ π
- ☐ $\pi/4$
- ☐ $3\pi/4$
- ☐ ingen af de andre

Vink til (c): Hovedargumentet er en polær vinkel i intervallet $]-\pi, \pi]$.

Opgave 4 (10 point)

(a) (5 point) En homogen anden ordens differentialligning er givet ved

$$y'' = -4y.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk hvori c_1 og c_2 er arbitrære reelle konstanter. Markér det udtryk som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

- ☐ $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{t} + c_2 t$
- ☐ $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$
- ☑ $y(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$
- ☐ $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$
- ☐ $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t}$
- ☐ $y(t) = c_1 + c_2$
- ☐ ingen af de andre

(b) (2 point) Hvilken funktion $x_p(t)$ er en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) = -4x(t) + 5e^t.$$

blandt følgende funktionsudtryk.

- ☐ $x_p(t) = e^{2t}$
- ☐ $x_p(t) = e^{-t}$
- ☐ $x_p(t) = e^{-2t}$
- ☐ $x_p(t) = te^{t}$
- ☑ $x_p(t) = e^{t}$
- ☐ ingen af de andre

(c) (3 point) Markér løsningen $x(t)$ til begyndelsesværdiproblemet

$$x''(t) = -4x(t) + 5e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

blandt følgende funktionsudtryk.

- ☐ $x(t) = \sin(t) - t\cos(t)$
- ☑ $x(t) = -\sin(2t)/2 - \cos(2t) + e^t$
- ☐ $x(t) = -\sin(t) + te^t$
- ☐ $x(t) = t - te^{2t}$
- ☐ $x(t) = \sin(2t)/2 + \cos(2t) - e^t$
- ☐ ingen af de andre

Opgave 5 (8 point)

Markér om de følgende udsagn er sandt eller falsk.

(a) (2 point) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6}$.

- [x] Sandt
- [ ] Falsk

(b) (2 point) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$.

- [x] Sandt
- [ ] Falsk

(c) (2 point) Hvis $f(x) = \sin(x)$ og $g(t) = \cos(t)$ så er $h(t) = f(g(t))$ differentiabel og $h'(t) = -\sin(t)\cos(\cos(t))$.

- [x] Sandt
- [ ] Falsk

(d) (2 point) $e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$.

- [x] Sandt
- [ ] Falsk

Opgave 6 (7 point)

Et område $\mathcal{R}$ i planen kan repræsenteres ved hjælp af uligheden $x^2+y^2 \leq 1$.

(a) (1 point) Hvilken af de nedenstående kurver beskriver randen af $\mathcal{R}$?

- [ ] en cirkel med centrum i $(0,1)$ og radius 1
- [x] en cirkel med centrum i $(0,0)$ og radius 1
- [ ] en trekant med hjørner i origo, $(0,1)$ og $(1,0)$
- [ ] en kvadrat med sidelængde 1 og centrum i origo
- [ ] ingen af de andre

(b) (2 point) Hvilken af de følgende uligheder beskriver alle punkterne af $\mathcal{R}$, hvor $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$?

- [ ] $r \geq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$
- [x] $0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- [ ] $0 \leq r \leq \cos(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$
- [ ] $r \geq 1$
- [ ] $0 \leq r \leq \sin(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi$
- [ ] ingen af de andre

(c) (4 point) Området $\mathcal{R}$ modelerer en plade med en massefylde $\delta(x,y) = x^2+y^2$. Hvilken af de følgende udtryk giver pladens masse?

- [ ] $2\pi\int_0^1 r^2 dr$
- [ ] $\pi\int_0^1 r^3 dr$
- [x] $2\pi\int_0^1 r^3 dr$
- [ ] $\int_0^{\pi}\int_0^{\sin(\theta)} r^3 dr\, d\theta$

- [ ] $\int_0^1 r^2 dr$
- [ ] ingen af de andre

Opgave 7 (8 point)

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af alle punkterne med koordinater (x, y) som opfylder uligheden $x^2 + y^2 \leq 1$. Funktionen f er defineret på $\mathcal{R}$ og givet ved $f(x, y) = x + y$.

(a) (4 point) Hvilke af de følgende punkter er indre kritiske punkter for f?

- [ ] $\langle 0, -1 \rangle$
- [ ] $\langle -1, 0 \rangle$
- [ ] $\langle 1, 0 \rangle$
- [x] Der findes ingen indre kritiske punkter
- [ ] $\langle 0, 0 \rangle$
- [ ] ingen af de andre

(b) (2 point) Markér om den følgende udsagn er sandt eller falsk:

Restriktionen af f til randen af $\mathcal{R}$ tager de samme værdier som funktionen $g(\theta) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$, hvor $\theta \in [0, 2\pi]$.

- [x] Sandt
- [ ] Falsk

(c) (2 point) Hvad er den maksimale værdi af f?

- [ ] 1
- [ ] 2
- [ ] 3
- [x] $\sqrt{2}$
- [ ] $2\sqrt{2}$
- [ ] ingen af de andre

Opgave 8 (12 point)

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = x^4 + y^4 - 2z^2$$

(a) (3 point) Hvilken af de følgende udtryk udgiver gradientvektoren ∇F?

- [ ] $\langle 4x, 4y, -4z \rangle$
- [ ] $\langle x^3, y^3, -2 \rangle$
- [ ] $\langle 4x^2, 4y^2, -4z^2 \rangle$
- [ ] $\langle 0, 0, 0 \rangle$
- [x] $\langle 4x^3, 4y^3, -4z \rangle$
- [ ] ingen af de andre

(b) (4 point) Hvilken af de følgende ligninger udgør tangentplanen til $\mathcal{F}$ i punktet $P = (1, 1, 1)$?

- [ ] $0 = x + y + z$
- [ ] $z = x + y$
- [ ] $z = 2x - y$
- [x] $x + y - z = 1$
- [ ] $z = y + 2x - 2$
- [ ] ingen af de andre

(c) (5 point) Fra ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvad er den partielle afledede $\partial z / \partial x$ i punktet P?

☐ -1	☐ -2	☐ 2
☐ 0	☑ 1	☐ ingen af de andre

Opgave 9 (12 point)

En funktion er givet ved

$$f(x,y) = \sin(2x + y),$$

hvor $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

(a) (2 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: $f(x,y)$ kan aldrig være lig med nul.

☐ Sandt ☑ Falsk

(b) (2 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: $f(x,0)$ er en voksende funktion af x.

☐ Sandt ☑ Falsk

(c) (4 point) Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (0,0)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \langle 0,1 \rangle$?

☐ 0	☐ 3	☐ 4
☑ 1	☐ 2	☐ ingen af de andre

(d) (4 point) Hvilken af de følgende enhedsvektorer peger i den retning hvor f vokser hurtigst i punktet P (retningen $\mathbf{v}$ hvor $D_{\mathbf{v}}f(P)$ er størst)?

☐ $\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$	☐ $\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$	☐ $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$
☐ $\langle 1,0 \rangle$	☑ $\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \rangle$	☐ $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$
☐ $\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$	☐ $\langle 0,1 \rangle$	☐ ingen af de andre

Opgave 10 (9 point)

En funktion er givet ved

$$f(x) = \cos(x^2)$$

for alle reelle tal x.

(a) (5 point) Markér det korrekte udtryk for $f''(x)$ (dvs f to gange differentieret)

- ☐ $-4\cos(x^2)$
- ☐ $-x^4\cos(x^2)$
- ☑ $-2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2)$
- ☐ $2\cos(2x)$
- ☐ $2\sin(x^2) - x^2\cos(x^2)$
- ☐ ingen af de andre

(b) (4 point) Hvilket af de følgende udtryk er anden ordens Taylor polynomiet for f med udviklingspunkt $x = 0$?

- ☐ $1 + x + x^2$
- ☐ $1 + x + x^2/2$
- ☐ $1 - x + x^2/2$
- ☑ 1
- ☐ $2x + x^2$
- ☐ ingen af de andre

Opgave 11 (11 point)

En kurve i planen er givet ved

$$x(t) = t^2,$$
$$y(t) = \sin(t^3)$$

for alle reelle tal t.

(a) (2 point) For hvilken værdi af parameteren t går kurven gennem origo?

- ☐ π
- ☐ 2π
- ☐ 3π
- ☐ 4π
- ☑ 0
- ☐ ingen af de andre

(b) (4 point) Hvad er værdien af farten når $t = 0$?

- ☑ 0
- ☐ 1
- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ $\sqrt{3}$
- ☐ $\sqrt{5}$
- ☐ ingen af de andre

(c) (5 point) Hvad er kurvens accelerationsvektor i origo?

- ☐ $\langle 0, 0\rangle$
- ☐ $\langle 1, 0\rangle$
- ☐ $\langle 0, 1\rangle$
- ☐ $\langle 1, 1\rangle$
- ☑ $\langle 2, 0\rangle$
- ☐ ingen af de andre

Opgave 12 (5 point)

Betragt det følgende begyndelsesværdiproblem

$$y'(x) = (x + 1)\, y(x), \quad y(0) = 1.$$

(a) (3 point) Antag, at y løser den ovenstående ligning og definer

$$f(x) = \ln(y(x)).$$

Hvilket begyndelsesværdiproblem løser f?

- ☐ $f'(x) = x + 1, \quad f(0) = 1$
- ☐ $f'(x) = -x - 1, \quad f(0) = 1$
- ☑ $f'(x) = x + 1, \quad f(0) = 0$
- ☐ $f'(x) = e^x, \quad f(0) = 0$
- ☐ $f'(x) = 1/(x+1), \quad f(0) = 0$
- ☐ ingen af de andre

(b) (2 point) Hvad er $y(x)$?

- ☐ $1 + x$
- ☐ $1/(x+1)$
- ☐ $\ln(1 + x + x^2/2)$
- ☐ $e^x - 1$
- ☑ $e^{x+x^2/2}$
- ☐ ingen af de andre