Reeksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design,
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

26. februar 2020

Dette eksamenssæt består af 8 nummererede sider med 12 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Opgave 1 (13 point)

(a) (5 point). En differentialligning af anden orden er givet ved

$$y'' + 3y' - 4y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk, hvori c_1 og c_2 er arbitrære konstanter. Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

- ☐ $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{t}$
- ☑ $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{5t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{5t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-3t}\cos(3t) + c_2 e^{-3t}\sin(3t)$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{t}\cos(6t) + c_2 e^{t}\sin(6t)$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-3t}\cos(2t) + c_2 e^{-3t}\sin(2t)$

(b) (4 point). Markér løsningen til begyndelsesværdiproblemet

$$y'' + 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 2$$

blandt følgende muligheder:

- ☐ $y(t) = -\frac{5}{4}e^{-3t} + c_2 e^{t}$
- ☑ $y(t) = e^{-4t} + 6e^{t}$
- ☐ $y(t) = 3e^{-3t} + c_2 e^{5t}$
- ☐ $y(t) = -\frac{1}{4}e^{t} + \frac{5}{4}e^{5t}$
- ☐ $y(t) = 7e^{2t} - 3te^{2t}$
- ☐ $y(t) = 2e^{-3t}\cos(3t) + 3e^{-3t}\sin(3t)$
- ☐ $y(t) = 7e^{t}\cos(6t) + 2e^{t}\sin(6t)$
- ☐ $y(t) = e^{-3t}\cos(2t) + e^{-3t}\sin(2t)$

(c) (4 point). Betragt den inhomogene differentialligning

$$y'' + 3y' - 4y = t - 1.$$

Hvilken af følgende funktioner er en partikulær løsning til denne ligning?

- ☐ $2t^2 - t + 1$
- ☐ $\frac{3}{2}t + e^{t}$
- ☐ $t^2 - 2$
- ☑ $-\frac{1}{4}t + \frac{1}{16}$
- ☐ $t - 1$
- ☐ $5t - 3$
- ☐ $5t - \frac{1}{4}$
- ☐ $\frac{1}{5}t + \frac{1}{5}$

Opgave 2 (7 point)

En plan kurve er givet ved

$$x = \sin(t) - e^t,$$
$$y = \cos(t) + e^t,$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (3 point). Punktet $P = (-1, 2)$ ligger på kurven. Hvilken værdi af parameteren t svarer til dette punkt?

☐ -2 ☐ $-\pi$ ☐ 2π ☐ 2

☐ $-\ln(2)$ ☑ 0 ☐ $\ln(2)$ ☐ $\frac{\pi}{2}$

(b) (4 point). Hvad er kurvens krumning for $t = 0$?

☐ -1 ☐ $-\frac{\pi}{2}$ ☐ π ☑ 1

☐ $-\ln(2)/2$ ☐ 0 ☐ $\ln(1)$ ☐ $\frac{\pi}{4}$

Opgave 3 (8 point)

En kurve i rummet er givet ved

$$x = 4\sin(e^t),$$
$$y = 4\cos(e^t),$$
$$z = 3e^t,$$

hvor parameteren t gennemløber de positive reelle tal.

(a) (3 point). Hvad er den afledede y'?

☐ $4e^t\cos(t)$ ☐ $-4e^t\cos(t)$ ☑ $-4e^t\sin(e^t)$ ☐ $4\cos(e^t)$

☐ $4e^t$ ☐ $-4e^t\sin(t)$ ☐ $-4\cos(e^t)$ ☐ $4e^t\cos(e^t)$

(b) (5 point). Hvad er buelængden af kurven fra $t = 0$ til $t = \ln(3)$?

☐ 2 ☐ $5(e-1)$ ☐ 2π ☐ $27\sqrt{3}$

☑ 10 ☐ $\ln(3)$ ☐ e^3 ☐ -2

Opgave 4 (7 point) En funktion er defineret ved

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

(a) (3 point). Hvad er den afledede $f'(x)$?

- [ ] $\frac{1}{2x+1}$
- [x] $\frac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}$
- [ ] $\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}}$
- [ ] $(x^2 + x + 1)^{-\frac{1}{2}}$
- [ ] $-\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$
- [ ] $\ln(x^2 + x + 1)$

(b) (4 point). Hvilken af nedenstående polynomier er Taylor-polynomiet af anden orden for f med udviklingspunkt $x = 0$?

- [ ] $1 + x - \frac{3}{2}x^2$
- [ ] $1 - x + x^3$
- [ ] $1 + 4x - 5x^2$
- [ ] $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2$
- [x] $1 - x$
- [ ] $1 - x^2$

Opgave 5 (7 point)

Betragt differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = -3\frac{e^{-x}}{y}, \quad y > 0.$$

Der er en entydig løsning y med begyndelsesværdi $y(0) = 2$. Besvar følgende spørgsmål angående denne løsning:

(a) (3 point). Hvad er differentialkvotienten $y'(0)$?

- [ ] -2
- [ ] $\frac{2}{3}$
- [ ] 2
- [x] $-\frac{3}{2}$
- [ ] 1
- [ ] 3

(b) (4 point). Hvad er funktionsværdien $y(\ln(2))$?

- [ ] 5
- [ ] $\frac{1}{3}$
- [ ] $\ln(2)$
- [ ] $e + 1$
- [x] 1
- [ ] $\sqrt{2e + 2}$

Opgave 6 (6 point)

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = \frac{4-3i}{2+i} + 1 + i, \quad z_2 = (e^{3+\frac{\pi}{3}i})^3$$

(a) (3 point). Hvad er z_1 skrevet på standardform?

☐ $2+3i$ ☐ $\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i$ ☐ $-3i$ ☐ $2-3i$

☐ $1+i$ ☐ $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}i$ ☑ $2-i$

(b) (3 point). Hvad er z_2 skrevet på standardform?

☐ $1+e^3i$ ☐ $1-e^2i$ ☑ $-e^9$ ☐ $e+e^2i$

☐ e^6 ☐ $1+e^2i$ ☐ e^6i ☐ $1+3i$

Opgave 7 (14 point)

En funktion er givet ved

$$f(x,y) = (x+y^2)\ln(x+y^2) - x$$

(a) (2 point) Funktionen f har en definitionsmængde. Afkryds hvis den består af samtlige punkter (x,y) for hvilke

☐ $x \geq -y^2$ ☐ $x > y^2$ ☑ $y^2 > -x$ ☐ $x \geq 0$

(b) (3 point) Hvilken af følgende udtryk svarer til den anden ordens partielle afledede $f_{xy}(x,y)$?

☐ $\frac{1}{x+y^2}$ ☐ $1-\frac{1}{(x+y^2)^2}$ ☐ $2\ln(x+y^2)$ ☑ $\frac{2y}{x+y^2}$

(c) (3 point) Hvilken af de følgende vektorer svarer til funktionens gradient ∇f i punktet $P=(0,1)$?

☐ $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$

(d) (3 point) Hvilket af de følgende tal er lig med den retningsafledede $D_uf(P)$ af funktionen f i punktet $P=(0,1)$ og i retningen bestemt ved enhedsvektoren

$$u = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ ?}$$

☐ $\frac{4}{5}$ ☐ 1 ☐ $\frac{6}{5}$ ☐ $\frac{7}{5}$ ☑ $\frac{8}{5}$

(e) (3 point) Hvilken af de følgende ligninger beskriver tangentplanen til grafen for funktionen f i punktet $Q = (0, 1, 0)$?

- ☐ $z = x - 2y - 2$
- ☑ $z = 2y - 2$
- ☐ $z = 2y$
- ☐ $z = x - 2$

Opgave 8 (10 point)

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen

$$F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 - z^2 = 1.$$

(a) (2 point) Hvilket af de følgende punkter ligger på fladen $\mathcal{F}$?

- ☑ $(2, -1, 1)$
- ☐ $(1, 1, 2)$
- ☐ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$
- ☐ $(1, 0)$
- ☐ $(1, 2, 1)$
- ☐ $(0, -\frac{1}{2}, 0)$

(b) (2 point) Hvilken af de følgende vektorer er normale til/står vinkelret på tangentplanen i punktet $P = (2, 1, -1)$ af fladen $\mathcal{F}$?

- ☐ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
- ☑ $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) (2 point) Hvilket af de følgende punkter er indeholde i tangentplanen i $P = (2, 1, -1)$ af fladen $\mathcal{F}$?

- ☐ $(0, 0, 0)$
- ☐ $(3, 2, 1)$
- ☑ $(-3, 1, 9)$
- ☐ $(4, 4, -1)$

(d) (4 point) I hvilke af de følgende punkter Q på fladen $\mathcal{F}$ er tangentplanen til fladen $\mathcal{F}$ i punktet Q parallel med planen $z = 2x - 2y$?

- ☐ $Q = (2, 1, -1)$
- ☐ $Q = (3, 2, 0)$
- ☐ $Q = (1, 0, 0)$
- ☐ $Q = (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
- ☐ $Q = (-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
- ☑ $Q = (2, 1, 1)$

Opgave 9 (8 point)

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x, \quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 5.$$

Markér værdien af planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} x\sqrt{x^2 + y^2}\, dA.$$

☐ $\frac{7}{4}$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ☐ $\frac{16}{5}$ ☐ $\frac{5\pi}{3}$ ☑ $\frac{9}{2}$ ☐ 2

Opgave 10 (7 point)

En tynd plade dækker netop et område $\mathcal{R}$ i planen. Området $\mathcal{R}$ består af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x, \quad 0 \leq y \leq 1 - x^2.$$

Pladens densitet er $\delta(x, y) = 3$. Hvad er pladens masse?

☐ $\frac{3}{4}$ ☐ 1 ☐ $\frac{3}{2}$ ☑ 2 ☐ $\frac{9}{4}$ ☐ $\frac{5}{2}$

Opgave 11 (8 point)

Et rumligt legeme $\mathcal{T}$ har form af et tetraeder afgrænset af fire planer; det er givet ved

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + y + z \leq 1,$$

og har en massetæthed (densitet)

$$\delta(x, y, z) = 1 - x.$$

Hvilket af de følgende tal svarer til massen af legemet $\mathcal{T}$?

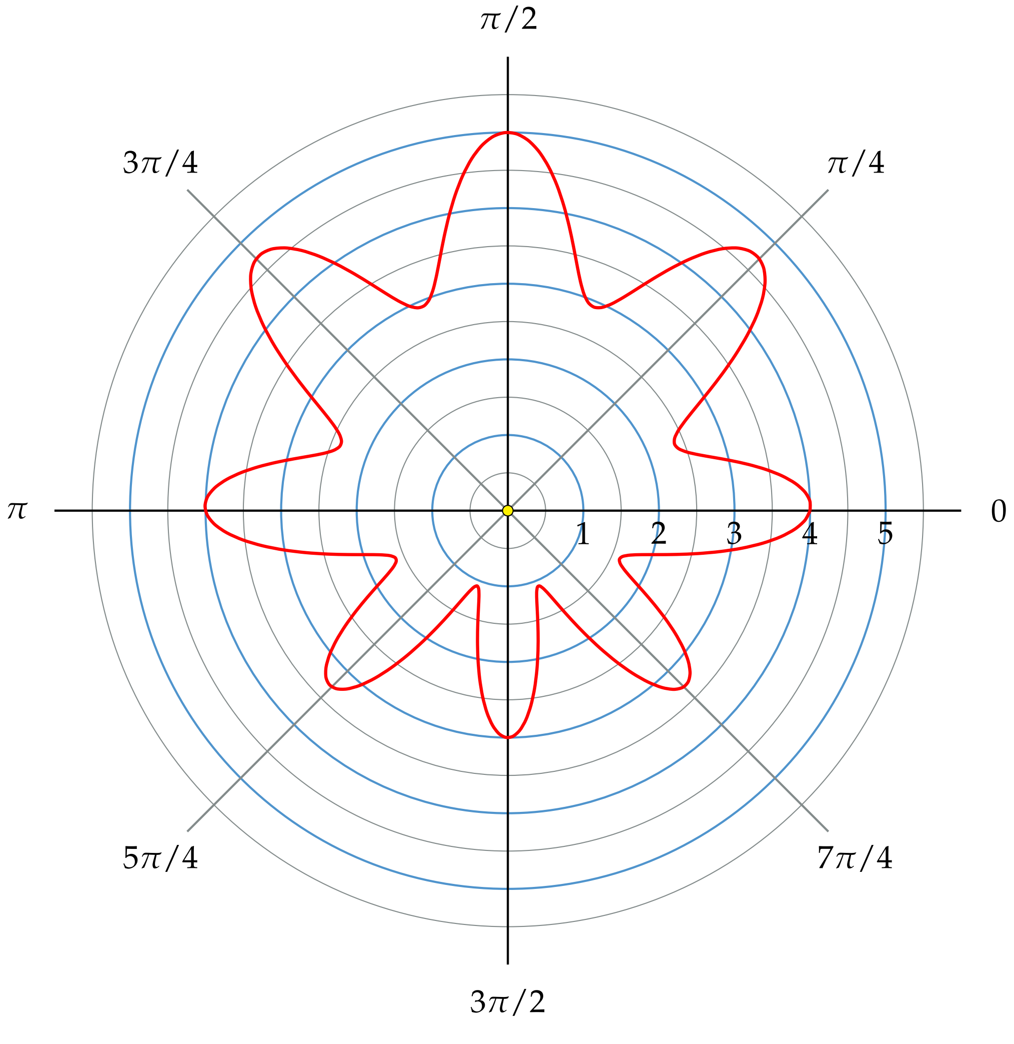
☐ $\frac{1}{4}$ ☑ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{1}{12}$ ☐ $\frac{1}{16}$ ☐ $\frac{1}{24}$ ☐ $\frac{1}{32}$

Opgave 12 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for en funktion

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

afbildet i polære koordinater.



En af forskrifterne for f i listen nedenfor svarer til figuren. Hvilken?

- ☐ $f(\theta) = 3 + \cos^2(16\theta) + \sin(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 4\cos(16\theta)\sin(\theta)$
- ☑ $f(\theta) = 3 + \cos(8\theta) + \sin(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 4 + \cos(8\theta)\sin(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 4\cos(8\theta) + \sin(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 4\cos(8\theta)\sin(\theta/2)$