

To find the English version of the exam, please read from the other end!

Se venligst bort fra den engelske version på bagsiden hvis du følger denne danske version af prøven.

Eksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design,
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

24. august 2018

Dette eksamenssæt består af 8 nummererede sider med 12 afkrydningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. I hver delopgave skal der **kun afkrydses én svarmulighed**. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger.

Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder. Du bedes også afkrydse det hold som du deltager i.

Held og lykke!

NAVN: _____

STUDIENUMMER: _____

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|---------------|
| <input type="checkbox"/> | Hold 1: LAND – ST | Horia Cornean |
| <input type="checkbox"/> | Hold LAN (København) | Iver Ottosen |
| <input type="checkbox"/> | Hold BBIO – MOE (København) | Oliver Matte |

Opgave 1 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x, y) = \frac{x - 3y^2 - 1}{y^2 - x}$$

for reelle variable x og y .

(a) (2 point) Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x, y) der opfylder

- | | | |
|--|---|---|
| <input type="checkbox"/> $y \neq \sqrt{ x }$ | <input type="checkbox"/> $x > 0, y < 0$ | <input type="checkbox"/> $3y^2 = x + 1$ |
| <input type="checkbox"/> $y^2 \neq x$ | <input type="checkbox"/> $x < 0, y > 0$ | <input type="checkbox"/> $y = \sqrt{x}$ |

(b) (4 point) Markér det korrekte udtryk for niveaukurven $f(x, y) = -3$.

- En parabel $x = 2y^2 + 1$
- En parabel $x = 3y^2 - 1$
- En cirkel med centrum i $(-1, 0)$ og radius 1
- En cirkel med centrum i $(-1, 0)$ og radius 1, undtagen punktet $(0, 0)$
- En ret linje $x = -\frac{1}{2}$
- En ret linje $x = -\frac{1}{2}$, undtagen punkterne $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ og $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Opgave 2 (6 point)

En parametrisk kurve i rummet er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{5t}, e^{(t^2)} \rangle$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (3 point) Hvad er kurvens fart for $t = 0$?

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> $\sqrt{15}$ | <input type="checkbox"/> 5 |
| <input type="checkbox"/> $2\sqrt{13}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{26}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{30}$ |

(b) (3 point) Hvilken af de følgende vektorer er kurvens accelerationsvektor for $t = 2$?

- | | | |
|---|---|---|
| <input type="checkbox"/> $\langle e^2, 25e^{10}, 18e^4 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle e^2, e^{10}, e^4 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 0, 0, 0 \rangle$ |
| <input type="checkbox"/> $\langle 1, 25, 10 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle e^2, 5e^{10}, 4e^4 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle e^2, 25e^{10}, 16e^4 \rangle$ |

Opgave 3 (6 point)

Tre komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} \quad \text{og} \quad z_3 = 2 + 2i.$$

(a) (3 point) Hvad er $z_1 z_3$ på standard form?

- | | | |
|-----------------------------------|--|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> $2 + 4i$ | <input type="checkbox"/> $1 + i$ |
| <input type="checkbox"/> $6 + 4i$ | <input type="checkbox"/> $2\sqrt{10}e^{\frac{2\pi}{3}i}$ | <input type="checkbox"/> $-2 + 6i$ |

(b) (3 point) Hvad er $\frac{z_2}{z_3}$ på polær form?

- | | | |
|---|---|--|
| <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}$ | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}i}$ |
| <input type="checkbox"/> $4e^{\frac{5\pi}{4}i}$ | <input type="checkbox"/> $2e^{\frac{7\pi}{4}i}$ | <input type="checkbox"/> $e^{\frac{3\pi}{2}i}$ |

Opgave 4 (10 point)

(a) (5 point) En homogen anden ordens differentiaalligning er givet ved

$$y'' + 2y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk hvori c_1 og c_2 er arbitrære reelle konstanter. Markér det udtryk som udgør den fuldstændige løsning til differentiaalligningen.

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 e^{-\sqrt{2}t} + c_2 e^{\sqrt{2}t}$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t)$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t)$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 t^2 + c_2 \sqrt{2}t$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{2t}$ |

(b) (5 point) Markér en partikulær løsning x_p til den inhomogene differentiaalligning

$$x'' + 2x = 4t^2,$$

blandt følgende funktionsudtryk.

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $x_p(t) = 2t^2$ | <input type="checkbox"/> $x_p(t) = -4t^2 - t - 2$ |
| <input type="checkbox"/> $x_p(t) = -4t^2$ | <input type="checkbox"/> $x_p(t) = 2t^2 - 2$ |
| <input type="checkbox"/> $x_p(t) = t^2 + t + 1$ | <input type="checkbox"/> $x_p(t) = 3t^4 + 2t^2 + 2t - 1$ |
| <input type="checkbox"/> $x_p(t) = 2t^2 - t - 2$ | <input type="checkbox"/> $x_p(t) = \cos(t) + \sin(t) + t^2 - 2$ |

Opgave 5 (8 point)

Markér om de følgende udsagn omkring krumning er sandt eller falsk.

(a) (2 point) En ret linje kan have positiv krumning.

Sandt

Falsk

(b) (2 point) En cirkel med radius R har konstant krumning $\frac{1}{R}$.

Sandt

Falsk

I delopgaverne (c) og (d) skal følgende tages til eftertragtning: To partikler $\mathbf{r}_A(t)$ og $\mathbf{r}_B(t)$ bevæger sig langs den samme kurve der indeholder et punkt P .

(c) (2 point) *Farten* for $\mathbf{r}_A(t)$ er dobbelt så stor som farten for $\mathbf{r}_B(t)$. Så er krumningen af $\mathbf{r}_A(t)$ i punktet P den samme som krumningen af $\mathbf{r}_B(t)$ i P .

Sandt

Falsk

(d) (2 point) *Accelerationen* for $\mathbf{r}_A(t)$ er dobbelt så stor som accelerationen for $\mathbf{r}_B(t)$. Så er krumningen af $\mathbf{r}_A(t)$ i punktet P dobbelt så stor som krumningen af $\mathbf{r}_B(t)$ i P .

Sandt

Falsk

Opgave 6 (6 point)

Et område \mathcal{R} i planen består af alle punkter indenfor og på trekanten med hjørner i punkterne $A = (0,0)$, $B = (0,1)$ og $C = (3,0)$. Et legeme med massetæthed $\delta(x,y) = 2xy^2$ dækker området \mathcal{R} .

(a) (3 point) Hvilken af de følgende uligheder viser, at et punkt med koordinater (x,y) tilhører \mathcal{R} ?

$0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 1$

$0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 1 - \frac{1}{3}x$

$0 \leq x \leq 9 - 3y, \quad 0 \leq y \leq 3$

$y = 3 - 3x$

$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 3 - 3x$

$x = 3, \quad y = 1$

(b) (3 point) Hvad er den korrekte formel som giver legemets masse?

$\int_0^3 \int_0^{9-3y} 2xy^2 dx dy$

$\int_0^3 \int_0^{1-\frac{1}{3}x} 2xy^2 dy dx$

$\int_0^1 \int_0^{3-3x} 1 dy dx$

$\int_0^1 \int_0^{3-3x} 2xy^2 dy dx$

$\int_0^3 \int_0^{1-\frac{1}{3}x} 1 dy dx$

$\int_0^1 \int_0^3 2xy^2 dx dy$

Opgave 7 (6 point)

Et område \mathcal{R} i planen består af alle punkterne med koordinater (x, y) som opfylder to uligheder:

$$1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2.$$

Markér værdien af planintegralet

$$\int_{\mathcal{R}} 4(x^2 + y^2) dA.$$

0

2π

30π

-2π

$15\pi/2$

47

Opgave 8 (10 point)

En flade \mathcal{F} i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = -2 \sin(z) + yz - x^2y + y^2 - 1.$$

(a) (5 point) Hvilken af de følgende ligninger udgør tangentplanen til \mathcal{F} i punktet $P = (0, 1, 0)$?

$0 = x + \frac{3}{2}y + z$

$z = -\frac{1}{2}y - 1$

$z = 1$

$z = 2y - 2$

$2 = -2y + 2z$

$0 = -x - y + 3z$

(b) (5 point) Fra ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvad er den partielle afledede $\partial z / \partial y$ i punktet P ?

-3

-1

0

2

π

3

Opgave 9 (17 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \arctan(2x + y) = \tan^{-1}(2x + y),$$

for variable x og y der begge gennemløber alle de reelle tal.

- (a) (4 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: Funktionen f har mindst ét kritisk punkt.

Sandt

Falsk

- (b) (4 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: Funktionen f har et globalt maksimum.

Sandt

Falsk

- (c) (4 point) Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (-1, 1)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$?

-2

$\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$5\sqrt{2}$

4

- (d) (5 point) Hvilken af de følgende enhedsvektorer peger i den retning hvor f vokser hurtigst i punktet P (retningen \mathbf{v} hvor $D_{\mathbf{v}}f(P)$ er størst)?

$\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$

$\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$

$\langle 0, -1 \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle$

$\langle \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \rangle$

$\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$

$\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle$

$\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$

Opgave 10 (9 point)

En funktion er givet ved

$$f(x) = \ln(\sqrt{2x+1})$$

for $x > -2^{-1/2}$.

(a) (5 point) Markér det korrekte udtryk for $f''(x)$ (*hint: husk at bruge kædereglene*).

- | | | |
|--|--|---|
| <input type="checkbox"/> $2 \ln(\sqrt{2x+1})$ | <input type="checkbox"/> $\frac{-2}{(\sqrt{2x+1})^2}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\sqrt{2}}{\ln(\sqrt{2x+1})}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{2}{2x^2+2\sqrt{2x+1}}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{-2\ln(\sqrt{2x+1})}{(\sqrt{2x+1})^2}$ |

(b) (4 point) Hvilket af de følgende udtryk er anden ordens Taylor polynomiet for f med udviklingspunkt $x = 0$?

- | | | |
|--|--|--|
| <input type="checkbox"/> $1 + \sqrt{2}x^2$ | <input type="checkbox"/> $1 - x^2$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$ |
| <input type="checkbox"/> $1 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}x^2$ | <input type="checkbox"/> $1 + 2x - x^2$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{2}x + 2x^2$ |
| <input type="checkbox"/> $-2x + \sqrt{2}x^2$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{2}x - x^2$ | <input type="checkbox"/> $2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}x^2$ |

Opgave 11 (11 point)

En kurve i planen er givet ved

$$\begin{aligned}x &= t + 3t^2, \\y &= 3t - t^2.\end{aligned}$$

(a) (2 point) For hvilken værdi af parameteren t går kurven gennem punktet $P = (4, 2)$?

- | | | | | |
|---------------------------------|-------------------------------|---|------------------------------|------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $-\pi$ | <input type="checkbox"/> -1 | <input type="checkbox"/> $-\frac{\pi}{4}$ | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 1 |
|---------------------------------|-------------------------------|---|------------------------------|------------------------------|

(b) (4 point) Hvad er kurvens krumning i P ?

- | | | | | |
|--|--|------------------------------|---|--|
| <input type="checkbox"/> $\frac{\sqrt{2}}{25}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{3}{50\sqrt{50}}$ | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> $\frac{\sqrt{2}}{100}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{20}{\sqrt{5}}$ |
|--|--|------------------------------|---|--|

(c) (5 point) For hvilken værdi af parameteren t er krumningen maksimal?

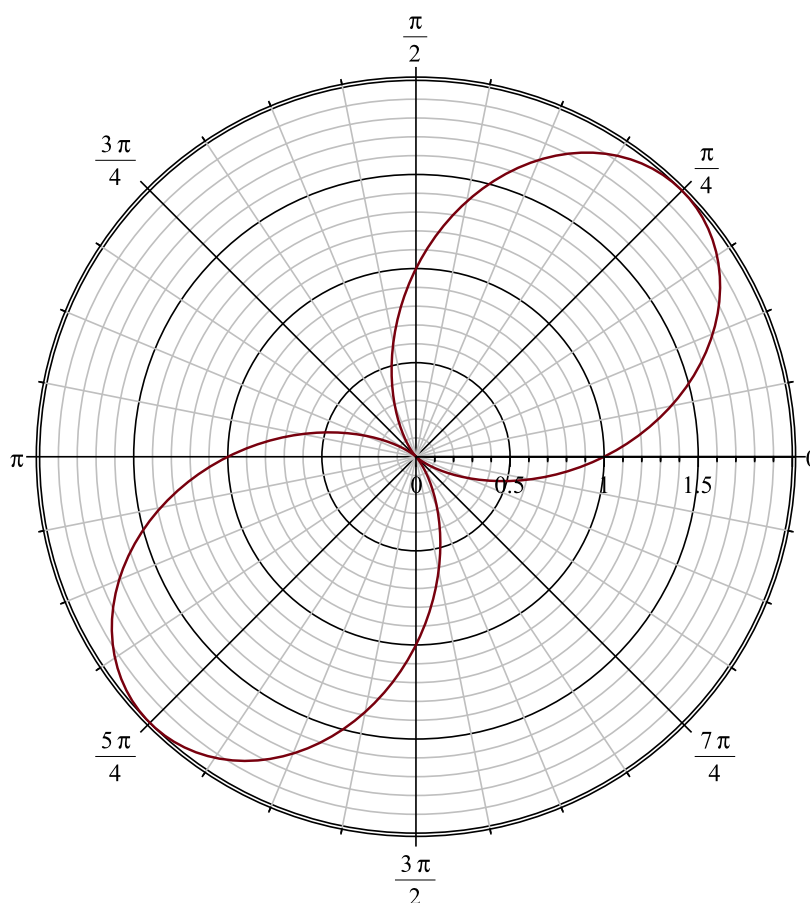
- | | | |
|-------------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| <input type="checkbox"/> -3 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 2π |
| <input type="checkbox"/> -1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 7 |

Opgave 12 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for en funktion

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

afbildet i polære koordinater.



En af forskrifterne for f i listen nedenfor svarer til figuren. Hvilken?

$f(\theta) = \sin(2\theta) + 1$

$f(\theta) = \theta^2 + 1$

$f(\theta) = \cos(4\theta) - 1$

$f(\theta) = \cos(2\theta) \sin(\theta)$

$f(\theta) = \sin(\theta) - \cos(\theta)$

$f(\theta) = 2 - \sin(2\theta)$