Reeksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet og Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

19. august 2016

Dette eksamenssæt består af 10 nummererede sider med 14 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger. Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

Held og lykke!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

Opgave 1 (6 point)

En kurve i rummet er givet ved

$$
\begin{aligned}
x &= \cos(2t), \\
y &= \sin(2t), \\
z &= 2\ln(t),
\end{aligned}
$$

hvor parameteren t gennemløber de positive reelle tal. Markér det korrekte udtryk for buelængden af kurven fra $t = 1$ til $t = 2$.

- ☐ $\int_1^2 (\sin(2t) + \cos(2t) + t^{-1})\, dt$
- ☐ $\int_1^2 4(1 + t^{-2})\, dt$
- ☐ $\int_1^2 2(\cos(2t) - \sin(2t) + t^{-1})\, dt$
- ☐ $\int_1^2 2\sqrt{1 + t^{-2}}\, dt$
- ☐ $\int_1^2 2\sqrt{1 + t^{-1}}\, dt$
- ☐ $\int_1^2 \sqrt{4 + t^{-1}}\, dt$

Opgave 2 (8 point)

En plan kurve er givet ved

$$
\begin{aligned}
x &= t^2 + t + 1, \\
y &= 2t^2 + t - 2,
\end{aligned}
$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (1 point). Hvilket punkt på kurven svarer til parameterværdien $t = 0$?

☐ $(0, 0)$ ☐ $(1, -2)$ ☐ $(1, 1)$ ☐ $(1, 0)$ ☐ $(1, 3)$

(b) (7 point). Hvad er krumningen af kurven for $t = 0$?

☐ $\frac{11}{4}$ ☐ 3 ☐ 1 ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$

Opgave 3 (7 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

(a) (3 point). Hvad giver den dobbelt afledede $f''(x)$?

- ☐ $-\frac{6}{(x+1)^4}$
- ☐ $\frac{x^2}{(x+1)^3}$
- ☐ $-\frac{3x}{(x+1)^3}$
- ☐ $-\frac{2}{(x+1)^3}$
- ☐ 0
- ☐ $-\frac{3}{(x+1)^4}$

(b) (4 point). Hvilket af nedenstående polynomier er 2. ordens Taylor polynomiet for $f(x)$ med udviklingspunkt $x = 0$?

- ☐ $x + 2x^2$
- ☐ $x - x^2$
- ☐ $1 + x^2$
- ☐ $1 + 3x^2$
- ☐ x
- ☐ $x + 3x^2$
- ☐ $2x + \frac{3}{2}x^2$
- ☐ $x - 3x^2$
- ☐ $x + x^2$
- ☐ $1 + 2x + x^2$

Opgave 4 (5 point)

Angiv værdien af integralet

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3}{1+9t^2} dt.$$

- ☐ 1
- ☐ $\frac{\pi}{4}$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 3
- ☐ -1
- ☐ $\frac{\pi}{3}$

Opgave 5 (5 point)

Betragt differentialligningen

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk, hvori der indgår to arbitrære konstanter c_1 og c_2. Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

☐ $y(t) = c_1 e^{2t} \cos(t) + c_2 e^{2t} \sin(t)$

☐ $y(t) = c_1 e^{6t} + c_2 e^{9t}$

☐ $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$

☐ $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{4t}$

☐ $y(t) = c_1 e^{3t} \cos(4t) + c_2 e^{3t} \sin(4t)$

☐ $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}$

☐ $y(t) = c_1 e^{t} \cos(3t) + c_2 e^{t} \sin(3t)$

☐ $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$

☐ $y(t) = c_1 e^{4t} \cos(3t) + c_2 e^{4t} \sin(3t)$

☐ $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

Opgave 6 (8 point)

Betragt den inhomogene differentialligning

$$y'' + 3y' - y = 6e^t - 9e^{2t}.$$

(a) (3 point). Hvilken af følgende funktioner $y_p(t)$ kan, for passende valg af konstanterne A og B, blive en partikulrær løsning til differentialligningen?

- ☐ $y_p(t) = At + B$
- ☐ $y_p(t) = Ae^t + Be^{2t}$
- ☐ $y_p(t) = A\sin(t) + B\cos(2t)$
- ☐ $y_p(t) = Ae^{3t} + Be^{-t}$

(b) (5 point). Hvad skal konstanterne A og B være, for at man får en partikulær løsning?

- ☐ $A = 2, \quad B = -1$
- ☐ $A = 3, \quad B = 1$
- ☐ $A = 1, \quad B = 3$
- ☐ $A = 1, \quad B = -1$

Opgave 7 (9 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = y + \sqrt{2x - y}.$$

Afkryds den rigtige mulighed i hvert delspørgsmål herunder.

(a) (4 point). Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x, y), der opfylder

- ☐ $x \geq y$
- ☐ $x \geq 0$ og $y \leq 0$
- ☐ $y \leq 2x$
- ☐ $y \neq 2x$
- ☐ $2x - y \leq 1$
- ☐ $y \geq 0$

(b) (5 point). Den partielle afledede $f_x(x, y)$ er lig

- ☐ $1 + \frac{1}{2\sqrt{2x-y}}$
- ☐ $\frac{1}{\sqrt{2x-y}}$
- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ $1 + 4x$
- ☐ $\frac{1}{2\sqrt{2x-y}}$
- ☐ $\frac{1+y}{\sqrt{2x-y}}$

Opgave 8 (10 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy + x - 3y + 2.$$

(a) (2 point). Hvad er funktionsværdien $f(1,1)$?

☐ 2 ☐ 4 ☐ 1 ☐ 0 ☐ 3

(b) (4 point). Hvilket af følgende punkter er et kritisk punkt for f?

☐ $(1,1)$ ☐ $(1,3)$ ☐ $(-1,2)$ ☐ $(2,2)$ ☐ $(-1,1)$

(c) (4 point). Grafen for f har en tangentplan i punktet $P = (1,1,f(1,1))$. Markér en ligning for denne tangentplan herunder.

☐ $x + 2y - 3z = 5$ ☐ $x - y + z = 4$

☐ $4x + y - z = 3$ ☐ $2x - z = 3$

☐ $5x + y + z = 11$ ☐ $4x + 2y - z = 2$

Opgave 9 (8 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x,y) = e^x + y^2.$$

(a) (4 point). Hvad giver den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (0,1)$ og retningen bestemt ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$?

☐ $\sqrt{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $\frac{9}{2}$ ☐ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(b) (4 point). Hvad er den maksimale værdi af den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (0,1)$ når $\mathbf{u}$ gennemløber samtlige enhedsvektorer?

☐ $\sqrt{5}$ ☐ 6 ☐ 9 ☐ $2\sqrt{3}$ ☐ 7

Opgave 10 (10 point)

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq x, \quad 0 \leq y.$$

Markér værdien af planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} (1 + \sqrt{x^2 + y^2})\, dA.$$

☐ $\frac{1}{3}$	☐ $\frac{11}{3}$	☐ $\sqrt{2\pi}$	☐ $\frac{3}{2}$	☐ $\frac{5\pi}{12}$
☐ $\frac{\pi}{4}$	☐ 2π	☐ $\frac{\pi}{4}$	☐ $\frac{1}{2}$	☐ $\frac{\pi}{8}$

Opgave 11 (5 point)

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = \frac{1 + 8i}{2 + i} + 1 - i, \qquad z_2 = e^{1 + \frac{\pi}{4} i} e^{2 + \frac{\pi}{4} i}.$$

(a) (3 point). Hvad giver z_1 skrevet på standard form?

☐ $\frac{3}{2} + 7i$ ☐ $2 - 3i$ ☐ 7 ☐ $5 - 2i$ ☐ $3 + 2i$

(b) (2 point). Hvad giver z_2 skrevet på standard form?

☐ e^3 ☐ $e^3 + e^3 i$ ☐ $e + i$ ☐ $e^3 i$ ☐ $3i$

Bemærkning. I opgave 12 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 12 (6 point)

Lad $\mathcal{T}$ være området i rummet bestående af de punkter (x, y, z), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad -y \leq z \leq y.$$

Et legeme med massetætheden (densiteten) $\delta(x, y, z) = y + 1$ dækker netop området $\mathcal{T}$. Legemets rumfang (volumen) betegnes V, og legemets masse betegnes m. Markér samtlige korrekte udtryk nedenfor.

☐ $m = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \int_{-y}^{y} (y+1)\, dzdxdy.$

☐ $m = \int_0^2 \int_{y^2}^{4} \int_{-y}^{y} (y+1)\, dzdxdy.$

☐ $m = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \int_{-y}^{y} (y+1)\, dzdydx.$

☐ $V = \int_0^2 \int_0^{y^2} \int_{-y}^{y} dzdxdy.$

☐ $V = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \int_{-y}^{y} dzdydx.$

Opgave 13 (8 point).

Besvar følgende 4 sand/falsk opgaver:

(a) (2 point). For det komplekse tal $z = 1 + i$ gælder der $|z^4| = 4$.

☐ Sand ☐ Falsk

(b) (2 point). Lad D være området i planen bestående af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y < 1$. Lad f være funktionen med forskrift

$$f(x, y) = \frac{1 + x}{1 + x - y}$$

og definitionsmængde D. Da antager f globalt maksimum på D.

☐ Sand ☐ Falsk

(c) (2 point). For ethvert reelt tal x gælder der følgende relation:

$$\sin(4x) = 4\sin(x).$$

☐ Sand ☐ Falsk

(d) (2 point). Punktet med polære koordinater $(r, \theta) = (5, -\frac{\pi}{2})$ har rektangulære koordinater

$$(x, y) = (0, -5).$$

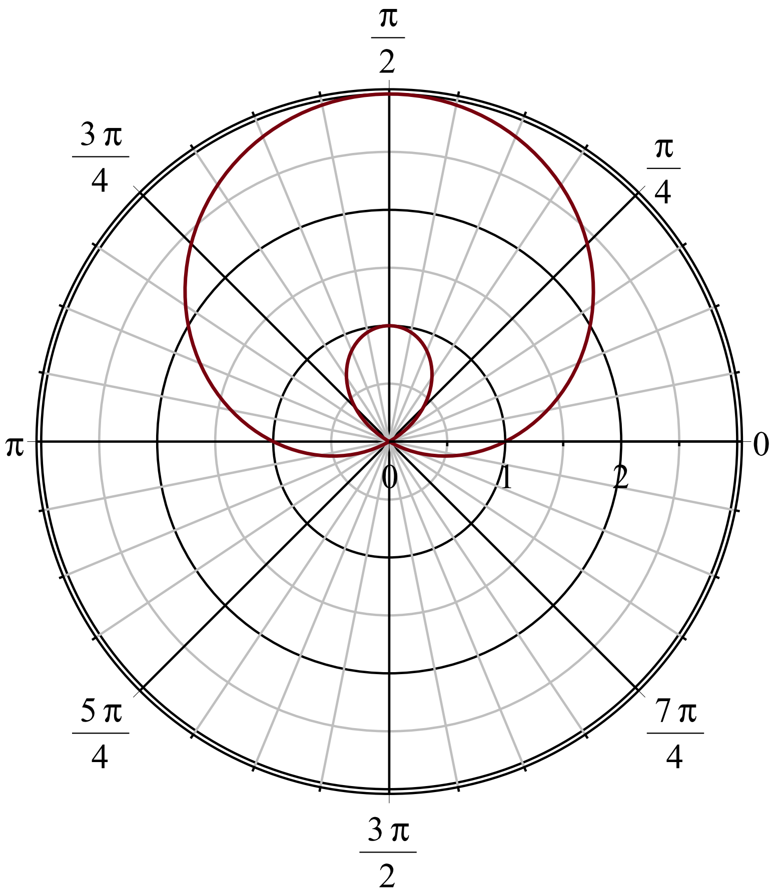
☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 14 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f svarer til figuren?

- ☐ $f(\theta) = 3 - 2\cos(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 2 + \sin(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 2 - \cos(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 1 + 2\sin(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 3\cos(\theta)$