Reeksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

17. februar 2017

Dette eksamenssæt består af 11 nummererede sider med 14 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger. Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

Held og lykke!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

Facit

Opgave 1 (8 point)

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 1 - 3i, \quad z_2 = 1 + 2i.$$

(a) (4 point). Hvad er $z_1 z_2 - z_1$ skrevet på standard form?

☐ $-3i$ ☐ $2+i$ ☐ $5-3i$ ☑ $6+2i$ ☐ $1-i$

(b) (4 point). Hvad er $\bar{z}_1 - z_2$ skrevet på polær form?

☐ $e^{\pi i/4}$ ☐ $3e^{\pi i/6}$ ☐ $\sqrt{2}\, e^{\pi i/4}$ ☐ $e^{-\pi i/4}$ ☑ $e^{\pi i/2}$

Opgave 2 (6 point)

En homogen anden ordens differentialligning er givet ved

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk, hvori c_1 og c_2 er arbitrære konstanter. Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

☐ $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{8t}$

☐ $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$

☐ $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$

☑ $y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t}$

☐ $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

☐ $y(t) = c_1 e^{-2t} \cos(4t) + c_2 e^{-2t} \sin(4t)$

☐ $y(t) = c_1 e^{-t} \cos(8t) + c_2 e^{-t} \sin(8t)$

☐ $y(t) = c_1 e^{2t} \cos(4t) + c_2 e^{2t} \sin(4t)$

Opgave 3 (7 point)

Det oplyses, at den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 6y' + 10y = 0$$

kan angives som

$$y(t) = c_1 e^{3t} \cos t + c_2 e^{3t} \sin t,$$

hvor c_1 og c_2 er arbitrære konstanter.

(a) (2 point). Markér det korrekte udtryk for $y(0)$.

☐ $c_1 + c_2$ ☑ c_1 ☐ $c_1 - c_2$ ☐ c_2 ☐ $3c_1 + 3c_2$

(b) (2 point). Markér det korrekte udtryk for $y'(0)$.

☐ $3c_1$ ☐ $3c_1 + 3c_2$ ☐ $3c_2$ ☑ $3c_1 + c_2$ ☐ $c_1 - 3c_2$

(c) (3 point). Begyndelsesværdiproblemet

$$y'' - 6y' + 10y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

har en entydig løsning $y(t)$. Find denne løsning og angiv funktionsværdien $y(\frac{\pi}{2})$ herunder.

☑ $-5e^{3\pi/2}$ ☐ $5e^{3\pi/2}$ ☐ $2e^{3\pi/2}$ ☐ $-e^{\pi}$ ☐ $4e^{\pi/2}$

Opgave 4 (7 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$$

for $x > -1$.

(a) (3 point). Hvad er den dobbelt afledede $f''(x)$?

- [x] $\frac{1}{1+x}$
- [ ] $\ln(x+1) - 1$
- [ ] $-\frac{1}{x}$
- [ ] $\frac{1}{(1+x)^3}$
- [ ] $\frac{1}{1+x} - 1$
- [ ] $\frac{1}{x} - 1$

(b) (4 point). Hvilket af nedenstående polynomier er tredje ordens Taylor polynomiet for $f(x)$ med udviklingspunkt $x = 0$?

- [ ] $x^2 + \frac{3}{2}x^3$
- [ ] $x - \frac{1}{24}x^2$
- [ ] $1 - 5x$
- [x] $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$
- [ ] $\frac{1}{2}x^3$
- [ ] $x - \frac{1}{3}x^3$
- [ ] $2x^3$
- [ ] $x - x^2 + \frac{1}{6}x^3$
- [ ] $2 + x^2 - \frac{1}{2}x^3$
- [ ] $x^2 - x^3$

Opgave 5 (9 point)

En kurve i planen er givet ved

$$x = e^t,$$
$$y = t^2,$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (3 point). Hvilket af følgende punkter ligger på kurven?

- [ ] $(e, 4)$
- [ ] $(1, 1)$
- [ ] $(2, \sqrt{2})$
- [ ] $(2, \frac{1}{2})$
- [ ] $(0, -1)$
- [x] $(e^2, 4)$
- [ ] $(1, -1)$
- [ ] $(2, -\sqrt{2})$

(b) (6 point). Kurvens krumning er nul i netop et punkt. Hvilket af følgende punkter er det?

- [ ] $(1, 0)$
- [ ] $(0, 1)$
- [x] $(e, 1)$
- [ ] $(2, (\ln 2)^2)$
- [ ] $(e^3, 9)$
- [ ] $(-1, 0)$
- [ ] $(e^{-2}, 4)$
- [ ] $(e^{-1}, 1)$

Opgave 6 (8 point)

En kurve i rummet er givet ved

$$x = 8t,$$
$$y = 3\sin(2t),$$
$$z = 3\cos(2t),$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (3 point). Markér det korrekte udtryk for den afledede z'.

- [ ] $-\sin(2t)$
- [ ] $6\cos(t)$
- [x] $-6\sin(2t)$
- [ ] $-\sin(t)$
- [ ] $\sin(2t)$
- [ ] $-\sin(6t)$
- [ ] $\sin(5t)$
- [ ] $-\sin(5t)$

(b) (5 point). Hvad er buelængden af kurven fra $t = 1$ til $t = 2$?

- [ ] 5
- [x] 10
- [ ] $\sqrt{6}$
- [ ] $2\sqrt{3}$
- [ ] 8
- [ ] 6
- [ ] $\frac{1}{2}$
- [ ] $\frac{5}{2}$

Opgave 7 (8 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \frac{2x + 3}{x^2 + y^2}.$$

Afkryds den rigtige mulighed i hvert delspørgsmål herunder.

(a) (4 point). Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x, y), der opfylder

- ☐ $x^2 \geq y^2$
- ☐ $x > y$
- ☐ $2x \geq 3$
- ☐ $x > 0$ og $y > 0$
- ☐ $x^2 + y^2 \geq 2x + 3$
- ☑ $x \neq 0$ eller $y \neq 0$

(b) (4 point). Niveaukurven med ligning $f(x, y) = 1$ kan beskrives som:

- ☐ En parabel med ligning $y = x^2 + x - 1$.
- ☐ En parabel med ligning $y = x^2 - 2x + 1$.
- ☐ En ret linje gennem $(-1, 0)$ med hældningskoefficienten 2.
- ☐ En ret linje gennem $(-1, 0)$ med hældningskoefficienten -3.
- ☑ En cirkel med centrum i $(1, 0)$ og radius 2.
- ☐ En cirkel med centrum i $(2, 3)$ og radius $\frac{1}{2}$.

Opgave 8 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x, y) = \arctan(x^2 - y^2).$$

(a) (3 point). Hvad er funktionsværdien $f(\sqrt{2}, 1)$?

☐ 0 ☐ $\frac{\pi}{3}$ ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ 1 ☑ $\frac{\pi}{4}$

(b) (3 point) Hvad er den partielle afledede $f_x(x, y)$?

☐ $(2x - 2y)(1 + (x^2 - y^2)^2)$ ☐ $\frac{2x-2y}{1+(x-y)^2}$

☑ $\frac{2x}{1+(x^2-y^2)^2}$ ☐ $2x(1 + (x^2 - y^2)^2)$

☐ $\frac{2xy}{1+(xy)^2}$ ☐ $\frac{2x}{1+x^2}$

Opgave 9 (7 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + y + 1.$$

(a) (3 point). Hvilket af følgende punkter er et kritisk punkt for f?

☐ $(1, 2)$ ☐ $(-1, 3)$ ☐ $(3, 3)$ ☐ $(4, -1)$ ☑ $(5, -4)$

(b) (4 point). Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}} f(P)$ i punktet $P = (-2, 1)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$?

☐ 8 ☑ $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ☐ $\sqrt{3} + 2$ ☐ $2\sqrt{3} - 1$ ☐ $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

Opgave 10 (5 point)

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = e^{x+y} - z + 2.$$

Fladen $\mathcal{F}$ har en tangentplan i punktet $P = (2, -2, 3)$. Markér en ligning for denne tangentplan.

- ☐ $2y + z = -1$
- ☐ $-x + 2y + 2z = 0$
- ☐ $x - y - z = 1$
- ☑ $x + y - z = -3$
- ☐ $2x + y - z = 1$
- ☐ $3x + 3y - 4z = -12$
- ☐ $x + y + z = 3$
- ☐ $-x + 2y + 4z = 2$
- ☐ $2x + 2y + z = 3$
- ☐ $5x + 4y + z = 3$

Opgave 11 (10 point)

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq 1, \quad -x \leq y \leq \sqrt{x}.$$

Markér værdien af planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} 2x^2 y \, dA.$$

- ☐ $\frac{1}{10}$
- ☐ $\frac{3}{10}$
- ☐ $\frac{1}{4}$
- ☐ 7
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ $\frac{5}{4}$
- ☑ $\frac{1}{20}$
- ☐ $\frac{11}{5}$
- ☐ $\frac{7}{2}$
- ☐ $\frac{3}{20}$

Bemærkning. I opgave 12 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 12 (6 point)

Lad $\mathcal{T}$ være området i rummet bestående af de punkter (x, y, z), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq 1, \quad -x \leq y \leq x, \quad 0 \leq z \leq 1 - x.$$

Et legeme med massetætheden (densiteten) $\delta(x, y, z) = 1 + x$ dækker netop området $\mathcal{T}$. Legemets rumfang (volumen) betegnes V, og legemets masse betegnes m. Markér samtlige korrekte udtryk nedenfor.

☑ $m = \int_{-1}^{1} \int_{|y|}^{1} \int_{0}^{1-x} (1 + x)\, dzdxdy.$

☑ $m = \int_{0}^{1} \int_{-x}^{x} \int_{0}^{1-x} (1 + x)\, dzdydx.$

☐ $m = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} \int_{-x}^{x} (1 + x)\, dzdxdy.$

☐ $V = \int_{-1}^{1} \int_{y}^{1} \int_{0}^{1-x} dzdxdy.$

☐ $V = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} dzdydx.$

Opgave 13 (8 point)

Besvar følgende 4 sand/falsk opgaver:

(a) (2 point). Punktet med rektangulære koordinater $(x, y) = (\sqrt{3}, 1)$ har polære koordinater $(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{6})$.

☐ Sand ☑ Falsk

(b) (2 point). For ethvert komplekst tal z gælder der, at

$$|\overline{z}|^4 = |z^4|.$$

☑ Sand ☐ Falsk

(c) (2 point). Lad D være området i planen bestående af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne $0 \leq x \leq 1$ og $0 < y \leq 1$. Lad f være funktionen med forskrift

$$f(x, y) = x + y$$

og definitionsmængde D. Da antager f globalt maksimum på D.

☑ Sand ☐ Falsk

(d) (2 point). Det gælder, at

$$\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4} = 1 - i.$$

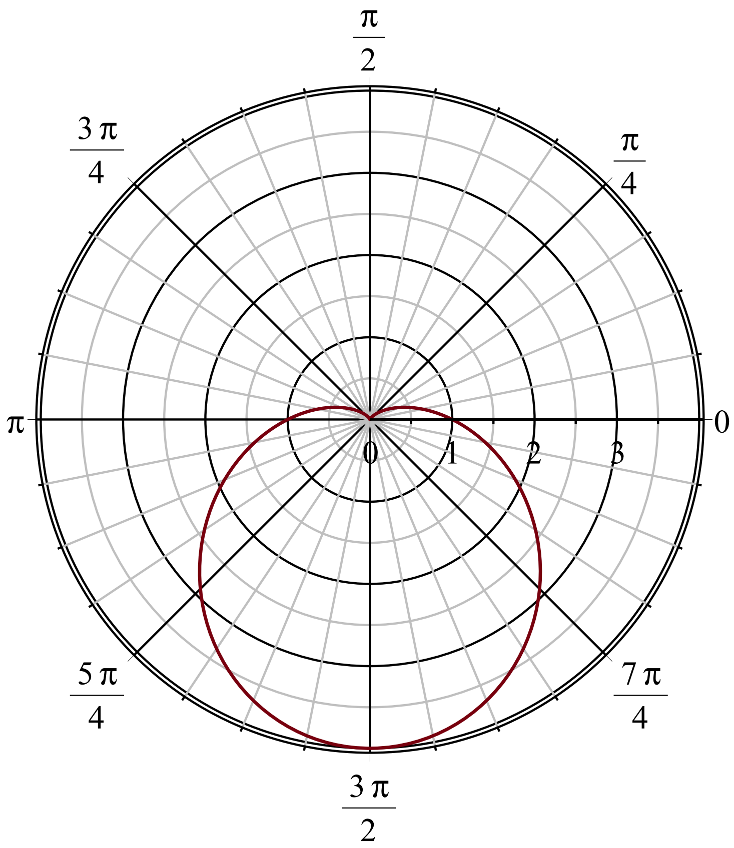
☑ Sand ☐ Falsk

Opgave 14 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f svarer til figuren?

- ☐ $f(\theta) = 3 + \cos^2\theta$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \sin^2\theta$
- ☐ $f(\theta) = 1 - \sin\theta$
- ☐ $f(\theta) = 1 - \sin(2\theta)$
- ☑ $f(\theta) = (1 - \sin\theta)^2$
- ☐ $f(\theta) = 2 - \cos\theta$