

Reeksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design,
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

19. august 2019

Opgave 1 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$$

for reelle variable x , y og z .

(a) (3 point) Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x, y, z) der opfylder

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $z = 0$ | <input checked="" type="checkbox"/> alle punkterne er tilladte |
| <input type="checkbox"/> $x^2 + y^2 + z^2 > 0$ | <input type="checkbox"/> $xyz \neq 0$ |
| <input type="checkbox"/> $x^2 + y^2 + z^2 < 0$ | <input type="checkbox"/> ingen af de andre |

(b) (3 point) Hvilke punkter (x, y, z) ligger på niveauoverfladen $f(x, y, z) = 2$?

- En sfære givet ved $x^2 + y^2 + z^2 = \sin^{-1}(2)$
- xy -planen
- Ingen punkter opfylder ligningen
- En plan parallel med xy -planen givet ved $z = \sin^{-1}(2)$
- ingen af de andre

Opgave 2 (6 point)

En parametriske kurve i rummet er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \langle \sin(t), \cos(t), t \rangle$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (2 point) Hvad er kurvens hastighedsvektor?

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $\langle \sin(t), \cos(t), 1 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle \sin(t^2/2), \cos(t^2/2), t^2/2 \rangle$ |
| <input type="checkbox"/> $\langle \cos(t), \sin(t), 1 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle \sin(t^2/2), -\cos(t^2/2), t^2/2 \rangle$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $\langle \cos(t), -\sin(t), 1 \rangle$ | <input type="checkbox"/> ingen af de andre |

(b) (2 point) Hvilken af de følgende vektorer er kurvens accelerationsvektor for $t = 2\pi$?

- $\langle 0, -1, 0 \rangle$ $\langle 1, 0, 0 \rangle$ $\langle 0, 1, 1/2 \rangle$
 $\langle 0, 1, 0 \rangle$ $\langle 1, 1, 1 \rangle$ ingen af de andre

(c) (1 point) Hvad er kurvens fart?

- $\sqrt{\sin(t) + \cos(t) + t}$ 2 $\sqrt{t+1}$
 $\sqrt{1+t^2}$ $\sqrt{2}$ ingen af de andre

(d) (1 point) Hvad er kurvens længde fra $t = 0$ til $t = 2$?

- 0 $2\sqrt{2}$ 1/2
 $\sqrt{2}$ $4\sqrt{2}$ ingen af de andre

Opgave 3 (6 point)

Tre komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 4 - 2i \quad \text{og} \quad z_3 = i^{100}.$$

(a) (2 point) Hvad er $z_1 + z_2$ på polær form?

- 1 $5e^{-i\pi/2}$ 5
 $5e^{i\pi/2}$ $\sqrt{5}$ ingen af de andre

(b) (2 point) Hvad er $\frac{2z_1}{z_2}$ på standardformen $a + ib$?

- $1 + i$ $-1 - i$ 5
 i $-i$ ingen af de andre

(c) (2 point) Hvad er hovedargumentet for z_3 ?

- 0 $\pi/2$ π
 $\pi/4$ $3\pi/4$ ingen af de andre

Vink til (c): Hovedargumentet er en polær vinkel i intervallet $] -\pi, \pi]$.

Opgave 4 (10 point)

- (a) (5 point) En homogen anden ordens differentiaalligning er givet ved

$$y'' = -4y.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk hvori c_1 og c_2 er arbitrære reelle konstanter. Markér det udtryk som udgør den fuldstændige løsning til differentiaalligningen.

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 e^t + c_2 t$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ | <input checked="" type="checkbox"/> $y(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-2t}$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{2t}$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 + c_2$ | <input type="checkbox"/> ingen af de andre |

- (b) (2 point) Hvilken funktion $x_p(t)$ er en partikulær løsning til den inhomogene differentiaalligning

$$x''(t) = -4x(t) + 5e^t.$$

blandt følgende funktionsudtryk.

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $x_p(t) = e^{2t}$ | <input type="checkbox"/> $x_p(t) = e^{-t}$ |
| <input type="checkbox"/> $x_p(t) = e^{-2t}$ | <input type="checkbox"/> $x_p(t) = te^t$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $x_p(t) = e^t$ | <input type="checkbox"/> ingen af de andre |

- (c) (3 point) Markér løsningen $x(t)$ til begyndelsesværdiproblemet

$$x''(t) = -4x(t) + 5e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

blandt følgende funktionsudtryk.

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $x(t) = \sin(t) - t \cos(t)$ | <input checked="" type="checkbox"/> $x(t) = -\sin(2t)/2 - \cos(2t) + e^t$ |
| <input type="checkbox"/> $x(t) = -\sin(t) + te^t$ | <input type="checkbox"/> $x(t) = t - te^{2t}$ |
| <input type="checkbox"/> $x(t) = \sin(2t)/2 + \cos(2t) - e^t$ | <input type="checkbox"/> ingen af de andre |

Opgave 5 (8 point)

Markér om de følgende udsagn er sandt eller falsk.

(a) (2 point) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$.

Sandt

Falsk

(b) (2 point) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$.

Sandt

Falsk

(c) (2 point) Hvis $f(x) = \sin(x)$ og $g(t) = \cos(t)$ så er $h(t) = f(g(t))$ differentiablel og $h'(t) = -\sin(t) \cos(\cos(t))$.

Sandt

Falsk

(d) (2 point) $e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$.

Sandt

Falsk

Opgave 6 (7 point)

En funktion f er for $t \geq 0$ givet ved

$$f(t) = e^t \sin(t) + t^2.$$

(a) (3 point) Hvilket af de nedenstående udtryk er $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ for $s > 1$?

$\frac{2}{s^4} + \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$

$\frac{1}{s^3} + \frac{1}{(s+1)^2+1}$

$\frac{2}{s^3} + \frac{1}{(s-1)^2+1}$

$\frac{2}{s^3} + \frac{2}{(s+1)^2+1}$

$\frac{1}{s^4} + \frac{2}{(s+1)^2+1}$

ingen af de andre

(b) (4 point) En funktion F er for $s > 1$ givet ved

$$F(s) = \frac{s}{s^2 - 1}.$$

Hvilket af de følgende udtryk er $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t)$ for $t \geq 0$ (invers Laplace transformation af F)?

$f(t) = 1 + t^2$

$f(t) = -e^t + e^{2t}$

$f(t) = e^t + e^{-t}$

$f(t) = \sin(t) + \cos(t)$

$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}(e^{2t} + 1)$

ingen af de andre

Opgave 7 (8 point)

Et område \mathcal{R} i planen består af alle punkterne med koordinater (x, y) som opfylder uligheden $x^2 + y^2 \leq 1$. Funktionen f er defineret på \mathcal{R} og givet ved $f(x, y) = x + y$.

(a) (4 point) Hvilke af de følgende punkter er indre kritiske punkter for f ?

- $\langle 0, -1 \rangle$
 $\langle -1, 0 \rangle$
 $\langle 1, 0 \rangle$
 Der findes ingen indre kritiske punkter
 $\langle 0, 0 \rangle$
 ingen af de andre

(b) (2 point) Markér om den følgende udsagn er sandt eller falsk:

Restriktionen af f til randen af \mathcal{R} tager de samme værdier som funktionen $g(\theta) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$, hvor $\theta \in [0, 2\pi]$.

- Sandt
 Falsk

(c) (2 point) Hvad er den maksimale værdi af f ?

- 1
 2
 3
 $\sqrt{2}$
 $2\sqrt{2}$
 ingen af de andre

Opgave 8 (12 point)

En flade \mathcal{F} i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = x^4 + y^4 - 2z^2$$

(a) (3 point) Hvilken af de følgende udtryk udgiver gradientvektoren ∇F ?

- $\langle 4x, 4y, -4z \rangle$
 $\langle x^3, y^3, -2 \rangle$
 $\langle 4x^2, 4y^2, -4z^2 \rangle$
 $\langle 0, 0, 0 \rangle$
 $\langle 4x^3, 4y^3, -4z \rangle$
 ingen af de andre

(b) (4 point) Hvilken af de følgende ligninger udgør tangentplanen til \mathcal{F} i punktet $P = (1, 1, 1)$?

- $0 = x + y + z$
 $z = x + y$
 $z = 2x - y$
 $x + y - z = 1$
 $z = y + 2x - 2$
 ingen af de andre

(c) (5 point) Fra ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvad er den partielle afledede $\partial z / \partial x$ i punktet P ?

- 1
 -2
 2
 0
 1
 ingen af de andre

Opgave 9 (12 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \sin(2x + y),$$

hvor $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

(a) (2 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: $f(x, y)$ kan aldrig være lig med nul.

Sandt

Falsk

(b) (2 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: $f(x,0)$ er en voksende funktion af x .

Sandt

Falsk

(c) (4 point) Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (0,0)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \langle 0,1 \rangle$?

0

3

4

1

2

ingen af de andre

(d) (4 point) Hvilken af de følgende enhedsvektorer peger i den retning hvor f vokser hurtigst i punktet P (retningen \mathbf{v} hvor $D_{\mathbf{v}}f(P)$ er størst)?

$\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$

$\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$

$\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$

$\langle 1,0 \rangle$

$\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \rangle$

$\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$

$\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$

$\langle 0,1 \rangle$

ingen af de andre

Opgave 10 (9 point)

En funktion er givet ved

$$f(x) = \cos(x^2)$$

for alle reelle tal x .

(a) (5 point) Markér det korrekte udtryk for $f''(x)$ (dvs f to gange differentieret)

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $-4 \cos(x^2)$ | <input type="checkbox"/> $2 \cos(2x)$ |
| <input type="checkbox"/> $-x^4 \cos(x^2)$ | <input type="checkbox"/> $2 \sin(x^2) - x^2 \cos(x^2)$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $-2 \sin(x^2) - 4x^2 \cos(x^2)$ | <input type="checkbox"/> ingen af de andre |

(b) (4 point) Hvilket af de følgende udtryk er anden ordens Taylor polynomiet for f med udviklingspunkt $x = 0$?

- | | | |
|--|--|--|
| <input type="checkbox"/> $1 + x + x^2$ | <input type="checkbox"/> $1 - x + x^2/2$ | <input type="checkbox"/> $2x + x^2$ |
| <input type="checkbox"/> $1 + x + x^2/2$ | <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> ingen af de andre |

Opgave 11 (11 point)

En kurve i planen er givet ved

$$\begin{aligned}x(t) &= t^2, \\y(t) &= \sin(t^3)\end{aligned}$$

for alle reelle tal t .

(a) (2 point) For hvilken værdi af parameteren t går kurven gennem origo?

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> π | <input type="checkbox"/> 3π | <input checked="" type="checkbox"/> 0 |
| <input type="checkbox"/> 2π | <input type="checkbox"/> 4π | <input type="checkbox"/> ingen af de andre |

(b) (4 point) Hvad er værdien af farten når $t = 0$?

- | | | |
|---|-------------------------------------|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> $\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{5}$ |
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> $\sqrt{3}$ | <input type="checkbox"/> ingen af de andre |

(c) (5 point) Hvad er kurvens accelerationsvektor i origo?

- | | | |
|---|---|--|
| <input type="checkbox"/> $\langle 0, 0 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 0, 1 \rangle$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\langle 2, 0 \rangle$ |
| <input type="checkbox"/> $\langle 1, 0 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 1, 1 \rangle$ | <input type="checkbox"/> ingen af de andre |

Opgave 12 (5 point)

Betragt det følgende begyndelsesværdiproblem

$$y'(x) = (x + 1) y(x), \quad y(0) = 1.$$

(a) (3 point) Antag, at y løser den ovenstående ligning og definer

$$f(x) = \ln(y(x)).$$

Hvilket begyndelsesværdiproblem løser f ?

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $f'(x) = x + 1, \quad f(0) = 1$ | <input type="checkbox"/> $f'(x) = e^x, \quad f(0) = 0$ |
| <input type="checkbox"/> $f'(x) = -x - 1, \quad f(0) = 1$ | <input type="checkbox"/> $f'(x) = 1/(x + 1), \quad f(0) = 0$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $f'(x) = x + 1, \quad f(0) = 0$ | <input type="checkbox"/> ingen af de andre |

(b) (2 point) Hvad er $y(x)$?

- | | | |
|------------------------------------|---|---|
| <input type="checkbox"/> $1 + x$ | <input type="checkbox"/> $1/(x + 1)$ | <input type="checkbox"/> $\ln(1 + x + x^2/2)$ |
| <input type="checkbox"/> $e^x - 1$ | <input checked="" type="checkbox"/> $e^{x+x^2/2}$ | <input type="checkbox"/> ingen af de andre |