To find the English version of the exam, please read from the other end!

Se venligst bort fra den engelske version på bagsiden hvis du følger denne danske version af prøven.

Eksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design,
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

24. august 2018

Dette eksamenssæt består af 8 nummererede sider med 12 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. I hver delopgave skal der **kun afkrydses én svarmulighed**. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger.

Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder. Du bedes også afkrydse det hold som du deltager i.

Held og lykke!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMER: ______________________________

☐ Hold 2: EIT – ITC – PDP Henrik Garde

☐ Hold 3: ROB Anathanasios Georgiadis

Opgave 1 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x,y) = \frac{x - 3y^2 - 1}{y^2 - x}$$

for reelle variable x og y.

(a) (2 point) Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x, y) der opfylder

- ☐ $y \neq \sqrt{|x|}$
- ☐ $x > 0,\ \ y < 0$
- ☐ $3y^2 = x + 1$
- ☐ $y^2 \neq x$
- ☐ $x < 0,\ \ y > 0$
- ☐ $y = \sqrt{x}$

(b) (4 point) Markér det korrekte udtryk for niveaukurven $f(x, y) = -3$.

- ☐ En parabel $x = 2y^2 + 1$
- ☐ En parabel $x = 3y^2 - 1$
- ☐ En cirkel med centrum i $(-1, 0)$ og radius 1
- ☐ En cirkel med centrum i $(-1, 0)$ og radius 1, undtagen punktet $(0, 0)$
- ☐ En ret linje $x = -\frac{1}{2}$
- ☐ En ret linje $x = -\frac{1}{2}$, undtagen punkterne $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ og $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Opgave 2 (6 point)

En parametrisk kurve i rummet er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle e^t,\ \ e^{5t},\ \ e^{(t^2)} \right\rangle$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (3 point) Hvad er kurvens fart for $t = 0$?

- ☐ 0
- ☐ $\sqrt{15}$
- ☐ 5
- ☐ $2\sqrt{13}$
- ☐ $\sqrt{26}$
- ☐ $\sqrt{30}$

(b) (3 point) Hvilken af de følgende vektorer er kurvens accelerationsvektor for $t = 2$?

- ☐ $\langle e^2,\ \ 25e^{10},\ \ 18e^4 \rangle$
- ☐ $\langle e^2,\ \ e^{10},\ \ e^4 \rangle$
- ☐ $\langle 0,\ \ 0,\ \ 0 \rangle$
- ☐ $\langle 1,\ \ 25,\ \ 10 \rangle$
- ☐ $\langle e^2,\ \ 5e^{10},\ \ 4e^4 \rangle$
- ☐ $\langle e^2,\ \ 25e^{10},\ \ 16e^4 \rangle$

Opgave 3 (6 point)

Tre komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} \quad \text{og} \quad z_3 = 2 + 2i.$$

(a) (3 point) Hvad er $z_1 z_3$ på standard form?

- ☐ 0
- ☐ $2 + 4i$
- ☐ $1 + i$
- ☐ $6 + 4i$
- ☐ $2\sqrt{10}e^{\frac{2\pi}{3}i}$
- ☐ $-2 + 6i$

(b) (3 point) Hvad er $\frac{z_2}{z_3}$ på polær form?

- ☐ $\frac{1}{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}$
- ☐ 2
- ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}i}$
- ☐ $4e^{\frac{5\pi}{4}i}$
- ☐ $2e^{\frac{7\pi}{4}i}$
- ☐ $e^{\frac{3\pi}{2}i}$

Opgave 4 (10 point)

(a) (5 point) En homogen anden ordens differentialligning er givet ved

$$y'' + 2y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk hvori c_1 og c_2 er arbitrære reelle konstanter. Markér det udtryk som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

- ☐ $y(t) = c_1 e^{-\sqrt{2}t} + c_2 e^{\sqrt{2}t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t)$
- ☐ $y(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t)$
- ☐ $y(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$
- ☐ $y(t) = c_1 t^2 + c_2 \sqrt{2}t$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{2t}$

(b) (5 point) Markér en partikulær løsning x_p til den inhomogene differentialligning

$$x'' + 2x = 4t^2,$$

blandt følgende funktionsudtryk.

- ☐ $x_\text{p}(t) = 2t^2$
- ☐ $x_\text{p}(t) = -4t^2 - t - 2$
- ☐ $x_\text{p}(t) = -4t^2$
- ☐ $x_\text{p}(t) = 2t^2 - 2$
- ☐ $x_\text{p}(t) = t^2 + t + 1$
- ☐ $x_\text{p}(t) = 3t^4 + 2t^2 + 2t - 1$
- ☐ $x_\text{p}(t) = 2t^2 - t - 2$
- ☐ $x_\text{p}(t) = \cos(t) + \sin(t) + t^2 - 2$

Opgave 5 (8 point)

Markér om de følgende udsagn omkring krumning er sandt eller falsk.

(a) (2 point) En ret linje kan have positiv krumning.

☐ Sandt ☐ Falsk

(b) (2 point) En cirkel med radius R har konstant krumning $\frac{1}{R}$.

☐ Sandt ☐ Falsk

I delopgaverne (c) og (d) skal følgende tages til eftertragtning: To partikler $\mathbf{r}_\mathrm{A}(t)$ og $\mathbf{r}_\mathrm{B}(t)$ bevæger sig langs den samme kurve der indeholder et punkt P.

(c) (2 point) *Farten* for $\mathbf{r}_\mathrm{A}(t)$ er dobbelt så stor som farten for $\mathbf{r}_\mathrm{B}(t)$. Så er krumningen af $\mathbf{r}_\mathrm{A}(t)$ i punktet P den samme som krumningen af $\mathbf{r}_\mathrm{B}(t)$ i P.

☐ Sandt ☐ Falsk

(d) (2 point) *Accelerationen* for $\mathbf{r}_\mathrm{A}(t)$ er dobbelt så stor som accelerationen for $\mathbf{r}_\mathrm{B}(t)$. Så er krumningen af $\mathbf{r}_\mathrm{A}(t)$ i punktet P dobbelt så stor som krumningen af $\mathbf{r}_\mathrm{B}(t)$ i P.

☐ Sandt ☐ Falsk

Opgave 6 (6 point)

En funktion f er for $t \geq 0$ givet ved

$$f(t) = e^t \cos(2t) + 4t^2 + t + 2.$$

Hvilket af de følgende udtryk er $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ for $s > 1$ (Laplace transformationen af f)?

☐ $\frac{2}{(s-1)^2+4} + \frac{8+s+2s^2}{s^3}$ ☐ $\frac{s-1}{(s-2)(s^2-1)} + \frac{8+2s^2}{s^3}$

☐ $\frac{s-2}{(s-2)^2+4} + \frac{8}{s^3} + \frac{1+2s}{s^2}$ ☐ $\frac{2}{(s-1)^2+4} + \frac{4}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}$

☐ $\frac{s-1}{(s-1)^2+4} + \frac{8}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}$ ☐ $\frac{s-2}{(s-2)+1} + \frac{8+s}{s^3} + \frac{2}{s}$

Opgave 7 (6 point)

En funktion F er for $s > 3$ givet ved

$$F(s) = \frac{6s-2}{(s-3)(s+5)}.$$

Hvilket af de følgende udtryk er $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t)$ for $t \geq 0$ (invers Laplace transformation af F)?

- ☐ $e^{5t} + 2e^{-3t}$
- ☐ $2e^{3t} + 4e^{-5t}$
- ☐ $2e^{-3t} + 5e^{5t}$
- ☐ $3te^{5t} + 3e^{-3t}$
- ☐ $\frac{1}{2}e^{3t} + 4e^{-5t}$
- ☐ $e^{-5t} + 2e^{3t}$

Opgave 8 (10 point)

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = -2\sin(z) + yz - x^2y + y^2 - 1.$$

(a) (5 point) Hvilken af de følgende ligninger udgør tangentplanen til $\mathcal{F}$ i punktet $P = (0, 1, 0)$?

- ☐ $0 = x + \frac{3}{2}y + z$
- ☐ $z = -\frac{1}{2}y - 1$
- ☐ $z = 1$
- ☐ $z = 2y - 2$
- ☐ $2 = -2y + 2z$
- ☐ $0 = -x - y + 3z$

(b) (5 point) Fra ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvad er den partielle afledede $\partial z/\partial y$ i punktet P?

- ☐ -3
- ☐ -1
- ☐ 0
- ☐ 2
- ☐ π
- ☐ 3

Opgave 9 (17 point)

En funktion er givet ved

$$f(x,y) = \arctan(2x+y) = \tan^{-1}(2x+y),$$

for variable x og y der begge gennemløber alle de reelle tal.

(a) (4 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: Funktionen f har mindst ét kritisk punkt.

☐ Sandt ☐ Falsk

(b) (4 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: Funktionen f har et globalt maksimum.

☐ Sandt ☐ Falsk

(c) (4 point) Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (-1,1)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$?

☐ -2 ☐ $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ☐ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ $5\sqrt{2}$ ☐ 4

(d) (5 point) Hvilken af de følgende enhedsvektorer peger i den retning hvor f vokser hurtigst i punktet P (retningen $\mathbf{v}$ hvor $D_{\mathbf{v}}f(P)$ er størst)?

☐ $\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$ ☐ $\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$ ☐ $\langle 0, -1 \rangle$

☐ $\langle 0, 1 \rangle$ ☐ $\langle \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \rangle$ ☐ $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$

☐ $\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$ ☐ $\langle 1, 0 \rangle$ ☐ $\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$

Opgave 10 (9 point)

En funktion er givet ved

$$f(x) = \ln(\sqrt{2}x + 1)$$

for $x > -2^{-1/2}$.

(a) (5 point) Markér det korrekte udtryk for $f''(x)$ (*hint: husk at bruge kædereglen*).

- ☐ $2\ln(\sqrt{2}x + 1)$
- ☐ $\frac{-2}{(\sqrt{2}x+1)^2}$
- ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ☐ $\frac{\sqrt{2}}{\ln(\sqrt{2}x+1)}$
- ☐ $\frac{2}{2x^2+2\sqrt{2}x+1}$
- ☐ $\frac{-2\ln(\sqrt{2}x+1)}{(\sqrt{2}x+1)^2}$

(b) (4 point) Hvilket af de følgende udtryk er anden ordens Taylor polynomiet for f med udviklingspunkt $x = 0$?

- ☐ $1 + \sqrt{2}x^2$
- ☐ $1 - x^2$
- ☐ $\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$
- ☐ $1 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}x^2$
- ☐ $1 + 2x - x^2$
- ☐ $\sqrt{2}x + 2x^2$
- ☐ $-2x + \sqrt{2}x^2$
- ☐ $\sqrt{2}x - x^2$
- ☐ $2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}x^2$

Opgave 11 (11 point)

En kurve i planen er givet ved

$$x = t + 3t^2,$$
$$y = 3t - t^2.$$

(a) (2 point) For hvilken værdi af parameteren t går kurven gennem punktet $P = (4, 2)$?

☐ $-\pi$ ☐ -1 ☐ $-\frac{\pi}{4}$ ☐ 0 ☐ 1

(b) (4 point) Hvad er kurvens krumning i P?

☐ $\frac{\sqrt{2}}{25}$ ☐ $\frac{3}{50\sqrt{50}}$ ☐ 0 ☐ $\frac{\sqrt{2}}{100}$ ☐ $\frac{20}{\sqrt{5}}$

(c) (5 point) For hvilken værdi af parameteren t er krumningen maksimal?

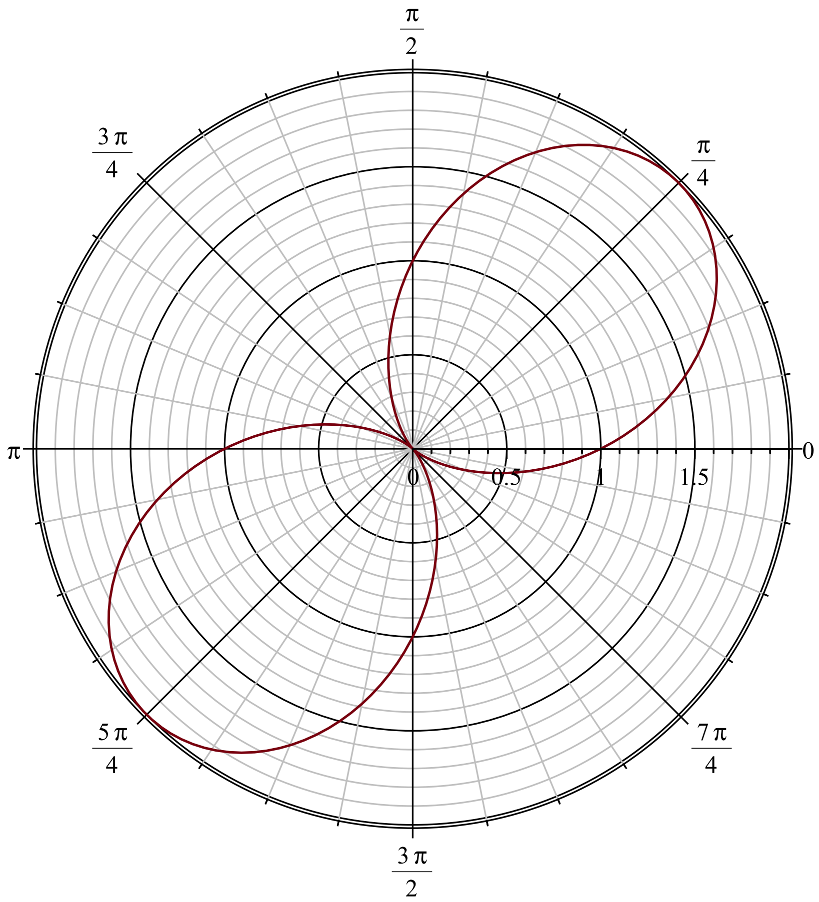
- ☐ -3
- ☐ 0
- ☐ 2π
- ☐ -1
- ☐ 1
- ☐ 7

Opgave 12 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for en funktion

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

afbildet i polære koordinater.



En af forskrifterne for f i listen nedenfor svarer til figuren. Hvilken?

- ☐ $f(\theta) = \sin(2\theta) + 1$
- ☐ $f(\theta) = \cos(4\theta) - 1$
- ☐ $f(\theta) = \sin(\theta) - \cos(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = \theta^2 + 1$
- ☐ $f(\theta) = \cos(2\theta)\sin(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 2 - \sin(2\theta)$