

*To find the English version of the exam, please read from the other end!*

*Se venligst bort fra den engelske version på bagsiden hvis du følger denne danske version af prøven.*

## **Eksamen i Calculus**

**Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design**

**12. juni 2017, 9:00 – 13:00**

Dette eksamenssæt består af 9 nummererede sider med 14 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv.

Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i dette opgavesæt.

Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger.

Opgaverne evalueres efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning i en (del)opgave ophæver én korrekt afkrydsning.

Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

Du bedes også afkrydset det hold som du deltager i.

Held og lykke!

NAVN: \_\_\_\_\_

STUDIENUMMMER: \_\_\_\_\_

Hold 2: EIT – ITC – PDP      Diego Ruano

Hold 4: ROB                      Anathanasios Georgiadis

## Opgave 1 (8 point)

En kurve i planen er givet ved

$$\begin{aligned}x &= e^t, \\y &= \ln t,\end{aligned}$$

hvor parameteren  $t$  gennemløber de positive reelle tal.

(a) (2 point) For hvilken parameter  $t$  går kurven gennem punktet  $P = (e, 0)$ ?

- $-1$         $0$         $1$         $e$

(b) (2 point) Hvilken af de følgende vektorer er kurvens hastighedsvektor i  $P$ ?

- $\begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix}$         $\begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$         $\begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix}$         $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$         $\begin{bmatrix} e \\ -e \end{bmatrix}$

(c) (4 point) Hvilket af de følgende tal er lig med kurvens krumning  $\kappa(P)$  i  $P$ ?

- $\frac{2e}{e^2+1}$         $\frac{2e}{\sqrt{e^2+1}}$         $\frac{2e}{\sqrt{e^2+1}^3}$         $\frac{e}{\sqrt{e^2+1}^3}$         $0$

## Opgave 2 (7 point)

Funktionen  $f$  er defineret ved

$$f(x, y) = x^2 e^{-y}.$$

Den bestemmer en flade ved  $z = f(x, y)$ , som indeholder punktet  $P = (1, -1, e)$ .

(a) (4 point) Tangentplanen for fladen i punktet  $P$  er bestemt ved en eller flere af de følgende ligninger. Hvilke(n)?

- $2e(x - 1) - e(y + 1) = z - e$         $z = 2x$   
  $2(x - 1) - (y + 1) = z - e$         $z = e(2x - y - 2)$   
  $2e(x - 1) - e(y - 1) = z + e$         $z = 2x - y - 2$

(b) (3 point) Hvilken af følgende udtryk svarer til den anden ordens partielle afledede  $f_{xy}(x, y)$ ?

- $2e^{-y}$         $x^2 e^{-y}$         $-2x e^{-y}$         $-\frac{x^3}{3} e^{-y}$

### Opgave 3 (6 point)

En kurve i rummet er givet ved

$$\begin{aligned}x &= \ln(t), \\y &= \sqrt{2} t, \\z &= \frac{1}{2}t^2,\end{aligned}$$

hvor parameteren  $t$  gennemløber de positive reelle tal.

(a) (3 point) Markér det korrekte udtryk for farten  $v(t)$ .

$\sqrt{t^2 + 1}$         $\sqrt{\frac{t^2+1}{t}}$         $t + \frac{1}{t}$         $\sqrt{t^4 + 2t + 1}$

(b) (3 point) Hvad er buelængden af kurven fra  $t = 1$  til  $t = e$ ?

$e + \frac{1}{e} - 2$       $\frac{1}{2}(e^2 + 1)$       $\frac{e^2}{2} + 1$         $e - \frac{1}{e^2}$         $\ln(2) + 1$

### Opgave 4 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x) = \sin(x^2)$$

for en reel parameter  $x$ .

(a) (2 point) Hvad er differentialkvotienten  $f'(x)$ ?

$\cos(x^2)$                         $2x \sin(x^2)$                         $\frac{x^3}{3} \cos(x^2)$   
  $2x \cos(2x)$                         $2x \cos(x^2)$                         $-2x \cos(2x)$

(b) (4 point) Et af de følgende polynomier er anden ordens Taylor polynomiet for funktionen  $f$  med udviklingspunkt  $x = 0$ . Hvilket?

$x^2 - x$         $x^2$                         $1 + x^2$                         $2x + x^2$                         $\frac{x^2}{2}$

### Opgave 5 (7 point)

Et komplekst tal er givet ved  $z = 1 + \sqrt{3}i$ .

(a) (3 point) Hvad er  $\bar{z}$  ( $z$  konjugeret) skrevet på polær form?

- $2e^{-\frac{\pi i}{3}}$         $e^{\frac{\pi i}{4}}$         $\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi i}{3}}$         $2e^{\frac{\pi i}{3}}$         $2e^{-\frac{\pi i}{6}}$

(b) (4 point) Hvad er  $z^3$  skrevet på standard form?

- $-2$                         $8$                         $1 - 3\sqrt{3}i$   
  $-8$                         $8i$                         $-1 - \sqrt{3}i$

### Opgave 6 (9 point)

Et komplekst tal  $z$  kaldes *rent imaginær* hvis det ligger på den imaginære akse, dvs. hvis det er på formen  $z = iy$  for et reelt tal  $y$ .

(a) (3 point) For nogle komplekse tal  $z$  gælder det, at  $z^2$  er rent imaginær. Hvilke af nedenstående beskriver netop alle disse tal?

- $z$  rent imaginær                        $z = x(1 \pm i)$ ,  $x$  reel  
 alle komplekse tal                        $z = x(1 \pm i)$ ,  $x \geq 0$   
  $z$  på formen  $x(1 + i)$ ,  $x$  reel        $z = x(1 - i)$ ,  $x$  reel

(b) (3 point) For nogle komplekse tal  $z$  gælder det, at  $z\bar{z}$  er reel. Hvilke af nedenstående beskriver netop alle disse tal?

- alle reelle tal                       alle komplekse tal  
 alle rent imaginære tal                $z$  på formen  $z = x(1 + i)$ ,  $x$  reel

(c) (3 point) For nogle komplekse tal  $z$  gælder det, at  $\frac{z}{z}$  er reel. Hvilke af nedenstående beskriver netop alle disse tal?

- alle tal som er reelle eller rent imaginære på nær 0       alle komplekse tal  
 alle reelle tal                        $z$  på formen  $z = x(1 - i)$ ,  $x$  reel  
 alle rent imaginære tal                $z = x(1 + i)$ ,  $x$  reel

## Opgave 7 (9 point)

En homogen anden ordens differentiaalligning er givet ved

$$y'' - 4y' + 8y = 0.$$

- (a) (3 point) I den efterfølgende liste findes en række funktionsudtryk hvori der indgår arbitrære konstanter  $c_1$  og  $c_2$ . Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentiaalligningen.

$y(t) = c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t)$

$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$

$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$

$y(t) = c_1 e^{2t} \cos(2t) + c_2 e^{2t} \sin(2t)$

$y(t) = c_1 e^{-2t} \cos(2t) + c_2 e^{-2t} \sin(2t)$

$y(t) = c_1 e^{2t} \cos(-2t) + c_2 e^{2t} \sin(-2t)$

$y(t) = c_1 e^{t^2} \cos(t^2) + c_2 e^{t^2} \sin(t^2)$

- (b) (3 point) Hvilken af de følgende funktionsudtryk løser differentiaalligningen med begyndelsesbetingelserne  $y(0) = 2, y'(0) = 6$ ?

$e^{2t} + e^{-2t}$

$2e^{-2t} \cos(2t) + e^{-2t} \sin(2t)$

$e^{2t} - t e^{-2t}$

$e^{2t} \cos(-2t) + e^{2t} \sin(-2t)$

$e^{2t} \cos(2t) + 2e^{2t} \sin(2t)$

$\frac{1}{2} e^{2t} \cos(2t) - \frac{1}{2} e^{2t} \sin(2t)$

$e^{2t} \cos(2t) + e^{2t} \sin(2t)$

ingen af dem

- (c) (3 point) Hvilke af de følgende funktionsudtryk er en (partikulær) løsning til den inhomogene differentiaalligning

$$y'' - 4y' + 8y = t^2?$$

$t^3 + \frac{1}{2}t$

$\frac{t^2}{8} + \frac{t}{8} + \frac{1}{32}$

$\frac{t^2}{8} - \frac{t}{8} - \frac{1}{32}$

$t^2 - 4t + 8$

$t + \frac{1}{8}$

$t^2 + t - \frac{1}{8}$

### Opgave 8 (9 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

Det oplyses at grafen for funktionen danner en opadgående skål mod  $\infty$  (åbner sig opad).

(a) (3 point) Hvilke af de følgende er kritiske punkter for funktionen  $f$ ?

- |                                  |                                 |                                |
|----------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> (0,0)   | <input type="checkbox"/> (-1,1) | <input type="checkbox"/> (1,1) |
| <input type="checkbox"/> (-1,-1) | <input type="checkbox"/> (1,-1) | <input type="checkbox"/> (2,3) |

(b) (3 point) Hvilket af de følgende tal er den mindste værdi som funktionen  $f$  antager?

- |                             |                             |                                       |
|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> -3 | <input type="checkbox"/> -2 | <input type="checkbox"/> 1            |
| <input type="checkbox"/> -1 | <input type="checkbox"/> 0  | <input type="checkbox"/> intet af dem |

(c) (3 point) Antager funktionen et lokalt maksimum i Origo (0,0)?

- |                             |                              |
|-----------------------------|------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nej |
|-----------------------------|------------------------------|

### Opgave 9 (6 point)

Hvilken af de følgende formler svarer til Laplace transformationen  $F(s)$ ,  $s > 2$  af funktionen

$$f(t) = e^{2t} + \cos(3t), t \geq 0?$$

- |   |   |  |
|---|---|--|
| <input type="checkbox"/> $\frac{2s^2-2s+9}{(s-2)(s^2+9)}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{2s^2+2s-9}{(s-2)(s^2+9)}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{s^2-2s+9}{(s-2)(s^2-3)}$ |
| <input type="checkbox"/> $\frac{2s^2-2s+9}{(s+2)(s^2+9)}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{2s^2-2s+9}{(s-2)(s^2+3)}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{2s^2-s+9}{(s-2)(s^2-9)}$ |

### Opgave 10 (6 point)

Hvilken af de følgende formler svarer til den *inverse Laplace transformation*  $f(t)$ ,  $t \geq 0$  af funktionen

$$F(s) = \frac{7s - 7}{(s - 3)(s + 4)}, \quad s > 3?$$

$2e^{3t} + 5e^{-4t}$

$e^{3t} + 4e^{-4t}$

$3e^{3t} + 5e^{-4t}$

$7e^{3t} - 7e^{-4t}$

$e^{3t} - e^{-4t}$

$5e^{3t} + 2e^{-4t}$

### Opgave 11 (7 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x, y) = (x + y)e^{x^2 - y^2}.$$

- (a) (3 point) Hvilket af de følgende tal er lig med den retningsafledede  $D_{\mathbf{u}}f(P)$  i punktet  $P = (1, 1)$  og retningen bestemt ved enhedsvektoren  $\mathbf{u} = 0.8\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j} = (0.8, 0.6)$ ?

$-0.6$

$0.6$

$5.8$

$-0.4$

$0$

$2.2$

- (b) (4 point) Hver af de følgende vektorer  $\mathbf{v}$  bestemmer en enhedsvektor  $\mathbf{u}$  som peger i samme retning som  $\mathbf{v}$ . Markér alle vektorer i listen for hvilke det gælder, at  $D_{\mathbf{u}}f(P) = 0$ .

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}$

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

## Opgave 12 (7 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

- (a) (2 point) Funktionen  $f$  har en definitions­mængde. Afkryds hvis den består af samtlige punkter, der opfylder

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $x \neq -y$              | <input type="checkbox"/> $x = y = 0$                 |
| <input type="checkbox"/> $x \geq 0$ og $y \geq 0$ | <input type="checkbox"/> $x \neq 0$ eller $y \neq 0$ |
| <input type="checkbox"/> $x \neq 0$ og $y \neq 0$ | <input type="checkbox"/> $x \neq 0$                  |

- (b) (3 point) Hvilken af de følgende beskrivelser svarer til niveaukurven med ligningen  $f(x, y) = \frac{1}{4}$ ?

- En cirkel med centrum i  $(1, 0)$  og radius 1.
- En ret linje gennem  $(0, 0)$  med hældningskoefficient  $\sqrt{3}$ .
- To rette linjer gennem  $(0, 0)$  med hældningskoefficienter  $\pm\sqrt{3}$ .
- To rette linjer gennem  $(0, 0)$  med hældningskoefficienter  $\pm\sqrt{3} -$  på nær Origo.
- En ret linje gennem  $(0, 0)$  med hældningskoefficient  $\sqrt{3} -$  på nær Origo.
- To rette linjer gennem  $(0, 0)$  med hældningskoefficienter  $\pm\frac{1}{\sqrt{3}} -$  på nær Origo.

- (c) (2 point) Hvad svarer niveaukurven  $f(x, y) = 4$  til?

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> en ellipse      | <input type="checkbox"/> punktet Origo    |
| <input type="checkbox"/> en hyperbel     | <input type="checkbox"/> den tomme mængde |
| <input type="checkbox"/> to rette linjer | <input type="checkbox"/> en parabel       |



### Opgave 13 (6 point)

En flade  $\mathcal{F}$  i rummet er bestemt ved ligningen

$$F(x, y, z) = 2xy + 3xz - yz = 2.$$

Nogle af ligningerne nedenfor beskriver tangentplanen for fladen  $\mathcal{F}$  i punktet  $P = (1, -1, 1)$ . Hvilke?

$2x + 3y - z = 2$

$-x - y - 4z = -4$

$2z + 3y - x = 2$

$x - y + z = 3$

$x + y + 4z = 4$

$2x + 2y + 8z = 8$

$x - y + 4z = 6$

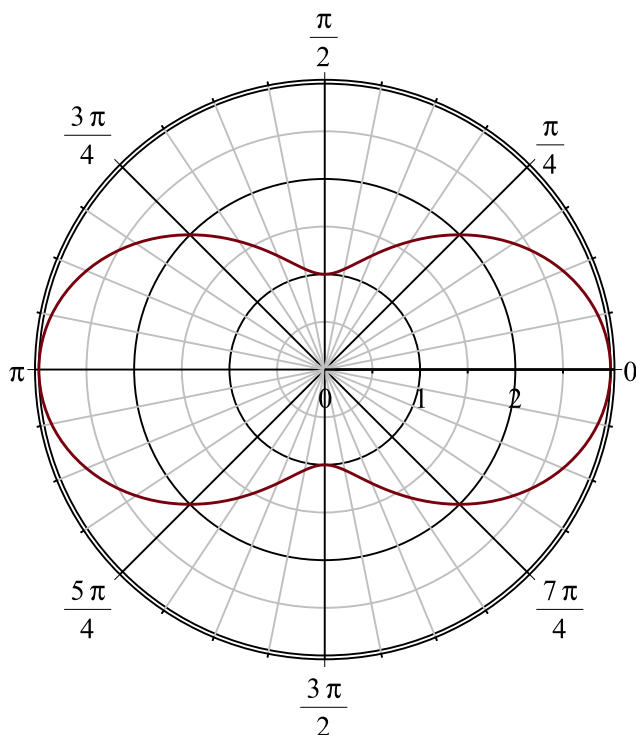
$x + y + 4z = 8$

### Opgave 14 (7 point)

Figuren nedenfor viser grafen for en funktion

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



En af forskrifterne for  $f$  i listen nedenfor svarer til figuren. Hvilken?

$f(\theta) = 1 + \cos(\theta)$

$f(\theta) = 2 + \sin(2\theta)$

$f(\theta) = 2 + \sin(\theta)$

$f(\theta) = 2 + \cos(2\theta)$

$f(\theta) = 2 + \cos(\theta)$

$f(\theta) = (1 - \sin(\theta))^2$