

# Eksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design,  
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet samt  
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

14. juni 2019

## Opgave 1 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x, y, z) = 1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2}$$

for reelle variable  $x$  og  $y$ .

(a) (3 point) Definitionsmængden for  $f$  består af samtlige punkter  $(x, y, z)$  der opfylder

- |                                      |  |  |
|--------------------------------------|--|--|
| <input type="checkbox"/> $z \neq 0$  | <input type="checkbox"/> $x^2 + y^2 \geq 1$        | <input type="checkbox"/> $yx \neq 0$       |
| <input type="checkbox"/> $x + y > 0$ | <input type="checkbox"/> Hele rummet uden $z$ akse | <input type="checkbox"/> ingen af de andre |

(b) (3 point) Hvad er niveauoverfladen  $f(x, y, z) = 1$ ?

- En sfære givet ved  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- $xy$ -planen uden origo
- En paraboloid givet ved  $z = x^2 + y^2$
- En plan parallel med  $xy$ -planen givet ved  $z = 1$
- ingen af de andre

## Opgave 2 (6 point)

En parametrisk kurve i rummet er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \langle \sin(2t), \cos(2t), 2t \rangle$$

hvor parameteren  $t$  gennemløber de reelle tal.

(a) (2 point) Hvad er kurvens hastighedsvektor?

- |  |  |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $\langle 2 \sin(2t), 2 \cos(2t), 2 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 2 \cos(2t), -2 \sin(2t), 2t \rangle$ |
| <input type="checkbox"/> $\langle 2 \cos(2t), 2 \sin(2t), 2 \rangle$ | <input type="checkbox"/> ingen af de andre                             |

(b) (2 point) Hvilken af de følgende vektorer er kurvens accelerationsvektor for  $t = \pi$ ?

- $\langle 0, -1, 0 \rangle$                         $\langle 0, -2, 0 \rangle$                         $\langle 0, -2, 1 \rangle$   
  $\langle 0, -4, 0 \rangle$                         $\langle -4, 0, 1 \rangle$                        ingen af de andre

(c) (1 point) Hvad er kurvens fart?

- $\sqrt{t}$                                         $2\sqrt{2}$                                         $\sqrt{e^{2t}}$   
  $\sqrt{1+t^2}$                                  4     ingen af de andre

(d) (1 point) Hvad er kurvens længde fra  $t = \pi$  til  $t = 2\pi$ ?

- $\pi$       $2\sqrt{2}\pi$                                         $5\pi$   
  $2\pi$       $4\pi$      ingen af de andre

### Opgave 3 (6 point)

Tre komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2i^3 \quad \text{og} \quad z_3 = i^{10}.$$

(a) (2 point) Hvad er  $z_1 + z_2$  på polær form?

- 1      $-2e^{i\pi/4}$                                         $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$   
  $2e^{-i\pi/4}$                                         $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$                                        ingen af de andre

(b) (2 point) Hvad er  $\frac{z_1}{z_3}$  på standardformen  $a + ib$ ?

- $1 - i$       $-1 - i$       $e^{-i\pi}$   
  $1 + i$       $1 + i^9$      ingen af de andre

(c) (2 point) Hvad er hovedargumentet for  $z_1^5$ ?

- 0      $\pi$       $-3\pi/4$   
  $\pi/4$       $3\pi/4$      ingen af de andre

**Vink til (c):** Hovedargumentet er en polær vinkel i intervallet  $]-\pi, \pi]$ . En brugbar identitet er  $\arg(z^n) = n \arg(z)$ .

### Opgave 4 (10 point)

- (a) (5 point) En homogen anden ordens differentiaalligning er givet ved

$$y'' = 2y' - y.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk hvori  $c_1$  og  $c_2$  er arbitrære reelle konstanter. Markér det udtryk som udgør den fuldstændige løsning til differentiaalligningen.

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$      | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 e^t + c_2 t$             |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 + c_2 t$               | <input type="checkbox"/> $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^t$            |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 + c_2 t^2$             | <input type="checkbox"/> ingen af de andre                    |

- (b) (2 point) Hvilken funktion  $x_p(t)$  er en partikulær løsning til den inhomogene differentiaalligning

$$x''(t) = 2x'(t) - x(t) + 1.$$

blandt følgende funktionsudtryk.

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $x_p(t) = t$     | <input type="checkbox"/> $x_p(t) = -t^2$    |
| <input type="checkbox"/> $x_p(t) = t + 1$ | <input type="checkbox"/> $x_p(t) = t - e^t$ |
| <input type="checkbox"/> $x_p(t) = 1$     | <input type="checkbox"/> ingen af de andre  |

- (c) (3 point) Markér løsningen  $x(t)$  til begyndelsesværdiproblemet

$$x''(t) = 2x'(t) - x(t) + 1, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$$

blandt følgende funktionsudtryk.

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $x(t) = e^t(2t + 1) - 1$ | <input type="checkbox"/> $x(t) = e^t t$          |
| <input type="checkbox"/> $x(t) = -4t^2$           | <input type="checkbox"/> $x(t) = t - e^{2t} + 1$ |
| <input type="checkbox"/> $x(t) = t - te^t$        | <input type="checkbox"/> $x(t) = 0$              |
| <input type="checkbox"/> $x(t) = e^t(2t - 1) + 1$ | <input type="checkbox"/> ingen af de andre       |

## Opgave 5 (8 point)

Markér om de følgende udsagn er sandt eller falsk.

(a) (2 point) Hastighedsvektoren til en kurve kan aldrig have en nullængde.

Sandt

Falsk

(b) (2 point) Når et punkt bevæger sig på en ret linje, så er krumningen uendelig stor.

Sandt

Falsk

(c) (2 point) Hvis  $f(x) = \cos(x)$  og  $g(t) = e^t$  så er  $h(t) = f(g(t))$  differentiablel og  $h'(t) = -\sin(e^t)$ .

Sandt

Falsk

(d) (2 point) Funktionen  $f(x) = \ln(x)$  hvor  $0 < x < 1$  har en invers funktion.

Sandt

Falsk

## Opgave 6 (7 point)

Et område  $\mathcal{R}$  i planen kan repræsenteres ved hjælp af uligheden  $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ .

(a) (1 point) Hvilken af de nedenstående kurver beskriver randen af  $\mathcal{R}$ ?

en parabel med toppunkt i  $\langle 0, 1 \rangle$

en cirkel med centrum i  $\langle 0, 1 \rangle$  og radius 1

en trekant med hjørner i origo,  $\langle 0, 1 \rangle$  og  $\langle 1, 0 \rangle$

en kvadrat med sidelængde 1 og centrum i  $\langle 0, 1 \rangle$

ingen af de andre

(b) (2 point) Hvilken af de følgende uligheder viser, at et punkt med koordinater  $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$  tilhører  $\mathcal{R}$ ?

$r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq r \leq 2 \cos(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

$r \leq 1$

$0 \leq r \leq 2 \sin(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

ingen af de andre

(c) (4 point) Området  $\mathcal{R}$  modellerer en plade med en massefylde  $\delta(x, y) = y$ . Hvilken af de følgende integraler giver pladens masse?

- |  |  |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $\int_0^\pi \int_0^{2\cos(\theta)} r^2 \cos(\theta) dr d\theta$ | <input type="checkbox"/> $\int_0^\pi \int_0^2 r \sin(\theta) dr d\theta$               |
| <input type="checkbox"/> $\int_0^\pi \int_0^{2\sin(\theta)} r^2 \sin(\theta) dr d\theta$ | <input type="checkbox"/> $\int_0^\pi \int_0^{2\sin(\theta)} r \sin(\theta) dr d\theta$ |
| <input type="checkbox"/> $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sin(\theta) dr d\theta$              | <input type="checkbox"/> ingen af de andre   |

### Opgave 7 (8 point)

Et område  $\mathcal{R}$  i planen består af alle punkterne med koordinater  $(x, y)$  som opfylder uligheden  $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ . Funktionen  $f$  er defineret på  $\mathcal{R}$  og givet ved  $f(x, y) = x^2$ .

(a) (2 point) Hvilke af de følgende punkter er indre kritiske punkter for  $f$ ?

- |  |  |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $\langle 0, -1 \rangle$                 | <input type="checkbox"/> $\langle t, 0 \rangle$ hvor $0 < t < 2$ |
| <input type="checkbox"/> $\langle 1, 0 \rangle$                  | <input type="checkbox"/> $\langle t, t \rangle$ hvor $0 < t < 2$ |
| <input type="checkbox"/> $\langle 0, t \rangle$ hvor $0 < t < 2$ | <input type="checkbox"/> ingen af de andre                       |

(b) (4 point) Hvilken af de nedenstående funktioner tager de samme værdier som  $f$ , når  $\langle x, y \rangle$  tilhører randen af  $\mathcal{R}$ ?

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $g(y) = (y - 1)^2$ hvor $-1 \leq y \leq 0$ | <input type="checkbox"/> $g(x) = 1 + x^2$ hvor $0 \leq x \leq 2$ |
| <input type="checkbox"/> $g(y) = y^2$ hvor $0 \leq y \leq 2$        | <input type="checkbox"/> $g(x) = x^2$ hvor $-1 \leq x \leq 1$    |
| <input type="checkbox"/> $g(y) = 1 - y^2$ hvor $0 \leq y \leq 2$    | <input type="checkbox"/> ingen af de andre                       |

(c) (2 point) Hvad er den maksimale værdi af  $f$ ?

- |                            |                            |  |
|----------------------------|----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 5                 |
| <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> ingen af de andre |

### Opgave 8 (12 point)

En flade  $\mathcal{F}$  i rummet er bestemt ved ligningen  $F(x, y, z) = 0$ , hvor

$$F(x, y, z) = 2y \sin(x) + y^2 - z^2$$

(a) (3 point) Hvilken af de følgende udtryk udgiver gradientvektoren  $\nabla F$ ?

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $\langle -2y \cos(x), 2 \sin(x) + 2y, -2z \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 2y \cos(x), 2 \sin(x) + 2y, -2z \rangle$ |
| <input type="checkbox"/> $\langle 2y \cos(x) + 2 \sin(x), 2y, -2z \rangle$  | <input type="checkbox"/> $\langle 0, 0, 0 \rangle$                         |
| <input type="checkbox"/> $\langle 2y \cos(x) + 2 \sin(x), 0, -2z \rangle$   | <input type="checkbox"/> ingen af de andre                                 |

(b) (3 point) Hvilken af de følgende ligninger udgør tangentplanen til  $\mathcal{F}$  i punktet  $P = (0, 1, 1)$ ?

- $2 = x + y + z$         $z = x + y$         $z = x - y$   
  $2z = x + 2y$         $z = y + 2x$        ingen af de andre

(c) (6 point) Fra ligningen  $F(x, y, z) = 0$ , hvad er den partielle afledede  $\partial z / \partial x$  i punktet  $P$ ?

- $-1$         $-2$         $2$   
  $0$         $1$        ingen af de andre

### Opgave 9 (12 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \sin(xy),$$

hvor  $x \geq 0$  og  $y \geq 0$ .

(a) (2 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk:  $f(x, y)$  kan ikke blive mindre end nul.

- Sandt       Falsk

(b) (2 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk:  $f(x, y)$  bliver aldrig lig med  $1/2$ .

- Sandt       Falsk

(c) (4 point) Hvad er den retningsafledede  $D_{\mathbf{u}}f(P)$  i punktet  $P = (0, 1)$  og retning givet ved enhedsvektoren  $\mathbf{u} = \langle 0, 1 \rangle$ ?

- $0$         $3$         $4$   
  $1$         $2$        ingen af de andre

(d) (4 point) Hvilken af de følgende enhedsvektorer peger i den retning hvor  $f$  vokser hurtigst i punktet  $P$  (retningen  $\mathbf{v}$  hvor  $D_{\mathbf{v}}f(P)$  er størst)?

- $\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$         $\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$         $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$   
  $\langle 1, 0 \rangle$         $\langle \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \rangle$         $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$   
  $\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$         $\langle 0, 1 \rangle$        ingen af de andre

### Opgave 10 (9 point)

En funktion er givet ved

$$f(x) = \sin(x^2)$$

for alle reelle tal  $x$ .

(a) (5 point) Markér det korrekte udtryk for  $f'''(x)$  (dvs  $f$  to gange differentieret)

- $-4 \sin(x^2)$                         $2 \sin(2x)$   
  $-x^4 \sin(x^2)$                         $2 \sin(x^2) - 4x^2 \cos(x^2)$   
  $2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)$                        ingen af de andre

(b) (4 point) Hvilket af de følgende udtryk er anden ordens Taylor polynomiet for  $f$  med udviklingspunkt  $x = 0$ ?

- $x + x^2$                         $-x + x^2$                         $2x + x^2$   
  $1 + x + x^2/2$                         $x^2$                        ingen af de andre

## Opgave 11 (11 point)

En kurve i planen er givet ved

$$x(t) = 2t + 1,$$

$$y(t) = \sin(t)$$

for alle reelle tal  $t$ .

- (a) (2 point) For hvilken værdi af parameteren  $t$  går kurven gennem punktet  $P = (1, 0)$ ?

0  
  $\pi$

$2\pi$   
  $3\pi$

$4\pi$   
 ingen af de andre

- (b) (4 point) Hvad er værdien af farten når  $t = 0$ ?

0  
 1

$\sqrt{2}$   
  $\sqrt{3}$

$\sqrt{5}$   
 ingen af de andre

- (c) (5 point) Hvad er kurvens krumning i  $P$ ?

0  
  $1/\sqrt{8}$

$1/\sqrt{27}$   
  $1/\sqrt{125}$

$2/\sqrt{125}$   
 ingen af de andre

## Opgave 12 (5 point)

Betragt det følgende begyndelsesværdiproblem

$$y'(x) = x y^2(x), \quad y(0) = 1.$$

- (a) (3 point) Antag, at  $y$  løser den ovenstående ligning og definer

$$f(x) = \frac{1}{y(x)}.$$

Hvilken ligning opfylder  $f$ ?

$f'(x) = x, \quad f(0) = 1$   
  $f'(x) = -x, \quad f(0) = 1$   
  $f'(x) = 1, \quad f(0) = 1$

$f'(x) = x^2, \quad f(0) = 0$   
  $f'(x) = x, \quad f(0) = 0$   
 ingen af de andre

- (b) (2 point) Hvad er  $y(x)$ ?

$1 + x$

$2/(2 - x^2)$

$1/(1 - x^2)$

$1/(1 + x)$

$2/(2 + x^2)$

ingen af de andre