Eksamen i Calculus

**Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design,
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet**

14. juni 2019

Opgave 1 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x, y, z) = 1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2}$$

for reelle variable x og y.

(a) (3 point) Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x, y, z) der opfylder

- ☐ $z \neq 0$
- ☐ $x + y > 0$
- ☐ $x^2 + y^2 \geq 1$
- ☑ Hele rummet uden z aksen
- ☐ $yx \neq 0$
- ☐ ingen af de andre

(b) (3 point) Hvad er niveauoverfladen $f(x, y, z) = 1$?

- ☐ En sfære givet ved $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- ☑ xy-planen uden origo
- ☐ En paraboloide givet ved $z = x^2 + y^2$
- ☐ En plan parallel med xy-planen givet ved $z = 1$
- ☐ ingen af de andre

Opgave 2 (6 point)

En parametrisk kurve i rummet er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \langle \sin(2t), \ \cos(2t), \ 2t \rangle$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (2 point) Hvad er kurvens hastighedsvektor?

- ☐ $\langle 2\sin(2t), 2\cos(2t), 2 \rangle$
- ☐ $\langle 2\cos(2t), 2\sin(2t), 2 \rangle$
- ☐ $\langle 2\cos(2t), -2\sin(2t), 2t \rangle$
- ☑ ingen af de andre

(b) (2 point) Hvilken af de følgende vektorer er kurvens accelerationsvektor for $t = \pi$?

- [ ] $\langle 0,\ -1,\ 0\rangle$
- [ ] $\langle 0,\ -2,\ 0\rangle$
- [ ] $\langle 0,\ -2,\ 1\rangle$
- [x] $\langle 0,\ -4,\ 0\rangle$
- [ ] $\langle -4,\ 0,\ 1\rangle$
- [ ] ingen af de andre

(c) (1 point) Hvad er kurvens fart?

- [ ] $\sqrt{t}$
- [x] $2\sqrt{2}$
- [ ] $\sqrt{e^{i2t}}$
- [ ] $\sqrt{1+t^2}$
- [ ] 4
- [ ] ingen af de andre

(d) (1 point) Hvad er kurvens længde fra $t = \pi$ til $t = 2\pi$?

- [ ] π
- [x] $2\sqrt{2}\pi$
- [ ] 5π
- [ ] 2π
- [ ] 4π
- [ ] ingen af de andre

Opgave 3 (6 point)

Tre komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2i^3 \quad \text{og} \quad z_3 = i^{10}.$$

(a) (2 point) Hvad er $z_1 + z_2$ på polær form?

- [ ] 1
- [ ] $-2e^{i\pi/4}$
- [x] $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$
- [ ] $2e^{-i\pi/4}$
- [ ] $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$
- [ ] ingen af de andre

(b) (2 point) Hvad er $\frac{z_1}{z_3}$ på standardformen $a + ib$?

- [ ] $1 - i$
- [x] $-1 - i$
- [ ] $e^{-i\pi}$
- [ ] $1 + i$
- [ ] $1 + i^9$
- [ ] ingen af de andre

(c) (2 point) Hvad er hovedargumentet for z_1^5?

- [ ] 0
- [ ] π
- [x] $-3\pi/4$
- [ ] $\pi/4$
- [ ] $3\pi/4$
- [ ] ingen af de andre

Vink til (c): Hovedargumentet er en polær vinkel i intervallet $]-\pi, \pi]$. En brugbar identitet er $\arg(z^n) = n \arg(z)$.

Opgave 4 (10 point)

(a) (5 point) En homogen anden ordens differentialligning er givet ved

$$y'' = 2y' - y.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk hvori c_1 og c_2 er arbitrære reelle konstanter. Markér det udtryk som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

- ☐ $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$
- ☐ $y(t) = c_1 e^t + c_2 t$
- ☐ $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$
- ☐ $y(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$
- ☐ $y(t) = c_1 + c_2 t$
- ☑ $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^t$
- ☐ $y(t) = c_1 + c_2 t^2$
- ☐ ingen af de andre

(b) (2 point) Hvilken funktion $x_p(t)$ er en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) = 2x'(t) - x(t) + 1.$$

blandt følgende funktionsudtryk.

- ☐ $x_p(t) = t$
- ☐ $x_p(t) = -t^2$
- ☐ $x_p(t) = t + 1$
- ☐ $x_p(t) = t - e^t$
- ☑ $x_p(t) = 1$
- ☐ ingen af de andre

(c) (3 point) Markér løsningen $x(t)$ til begyndelsesværdiproblemet

$$x''(t) = 2x'(t) - x(t) + 1, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$$

blandt følgende funktionsudtryk.

- ☐ $x(t) = e^t(2t + 1) - 1$
- ☐ $x(t) = e^t t$
- ☐ $x(t) = -4t^2$
- ☐ $x(t) = t - e^{2t} + 1$
- ☐ $x(t) = t - te^t$
- ☐ $x(t) = 0$
- ☑ $x(t) = e^t(2t - 1) + 1$
- ☐ ingen af de andre

Opgave 5 (8 point)

Markér om de følgende udsagn er sandt eller falsk.

(a) (2 point) Hastighedsvektoren til en kurve kan aldrig have en nullængde.

☐ Sandt ☑ Falsk

(b) (2 point) Når et punkt bevæger sig på en ret linje, så er krumningen uendelig stor.

☐ Sandt ☑ Falsk

(c) (2 point) Hvis $f(x) = \cos(x)$ og $g(t) = e^t$ så er $h(t) = f(g(t))$ differentiabel og $h'(t) = -\sin(e^t)$.

☐ Sandt ☑ Falsk

(d) (2 point) Funktionen $f(x) = \ln(x)$ hvor $0 < x < 1$ har en invers funktion.

☑ Sandt ☐ Falsk

Opgave 6 (7 point)

Et område $\mathcal{R}$ i planen kan repræsenteres ved hjælp af uligheden $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

(a) (1 point) Hvilken af de nedenstående kurver beskriver randen af $\mathcal{R}$?

☐ en parabel med toppunkt i $\langle 0, 1 \rangle$

☑ en cirkel med centrum i $\langle 0, 1 \rangle$ og radius 1

☐ en trekant med hjørner i origo, $\langle 0, 1 \rangle$ og $\langle 1, 0 \rangle$

☐ en kvadrat med sidelængde 1 og centrum i $\langle 0, 1 \rangle$

☐ ingen af de andre

(b) (2 point) Hvilken af de følgende uligheder viser, at et punkt med koordinater $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ tilhører $\mathcal{R}$?

☐ $r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$ ☐ $0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

☐ $0 \leq r \leq 2\cos(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi$ ☐ $r \leq 1$

☑ $0 \leq r \leq 2\sin(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi$ ☐ ingen af de andre

(c) (4 point) Området $\mathcal{R}$ modelerer en plade med en massefylde $\delta(x, y) = y$. Hvilken af de følgende integraler giver pladens masse?

☐ $\int_0^{\pi} \int_0^{2\cos(\theta)} r^2 \cos(\theta) dr\, d\theta$

☑ $\int_0^{\pi} \int_0^{2\sin(\theta)} r^2 \sin(\theta) dr\, d\theta$

☐ $\int_0^{2\pi} \int_0^{1} r \sin(\theta) dr\, d\theta$

☐ $\int_0^{\pi} \int_0^{2} r \sin(\theta) dr\, d\theta$

☐ $\int_0^{\pi} \int_0^{2\sin(\theta)} r \sin(\theta) dr\, d\theta$

☐ ingen af de andre

Opgave 7 (8 point)

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af alle punkterne med koordinater (x, y) som opfylder uligheden $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$. Funktionen f er defineret på $\mathcal{R}$ og givet ved $f(x, y) = x^2$.

(a) (2 point) Hvilke af de følgende punkter er indre kritiske punkter for f?

☐ $\langle 0, -1 \rangle$

☐ $\langle 1, 0 \rangle$

☑ $\langle 0, t \rangle$ hvor $0 < t < 2$

☐ $\langle t, 0 \rangle$ hvor $0 < t < 2$

☐ $\langle t, t \rangle$ hvor $0 < t < 2$

☐ ingen af de andre

(b) (4 point) Hvilken af de nedenstående funktioner tager de samme værdier som f, når $\langle x, y \rangle$ tilhører randen af $\mathcal{R}$?

☐ $g(y) = (y-1)^2$ hvor $-1 \leq y \leq 0$

☐ $g(y) = y^2$ hvor $0 \leq y \leq 2$

☐ $g(y) = 1 - y^2$ hvor $0 \leq y \leq 2$

☐ $g(x) = 1 + x^2$ hvor $0 \leq x \leq 2$

☑ $g(x) = x^2$ hvor $-1 \leq x \leq 1$

☐ ingen af de andre

(c) (2 point) Hvad er den maksimale værdi af f?

☑ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☐ ingen af de andre

Opgave 8 (12 point)

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = 2y \sin(x) + y^2 - z^2$$

(a) (3 point) Hvilken af de følgende udtryk udgiver gradientvektoren ∇F?

☐ $\langle -2y\cos(x), 2\sin(x) + 2y, -2z \rangle$

☐ $\langle 2y\cos(x) + 2\sin(x), 2y, -2z \rangle$

☐ $\langle 2y\cos(x) + 2\sin(x), 0, -2z \rangle$

☑ $\langle 2y\cos(x), 2\sin(x) + 2y, -2z \rangle$

☐ $\langle 0, 0, 0 \rangle$

☐ ingen af de andre

(b) (3 point) Hvilken af de følgende ligninger udgør tangentplanen til $\mathcal{F}$ i punktet $P = (0, 1, 1)$?

- [ ] $2 = x + y + z$
- [x] $z = x + y$
- [ ] $z = x - y$
- [ ] $2z = x + 2y$
- [ ] $z = y + 2x$
- [ ] ingen af de andre

(c) (6 point) Fra ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvad er den partielle afledede $\partial z/\partial x$ i punktet P?

- [ ] -1
- [ ] -2
- [ ] 2
- [ ] 0
- [x] 1
- [ ] ingen af de andre

Opgave 9 (12 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \sin(xy),$$

hvor $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

(a) (2 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: $f(x, y)$ kan ikke blive mindre end nul.

- [ ] Sandt
- [x] Falsk

(b) (2 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: $f(x, y)$ bliver aldrig lig med $1/2$.

- [ ] Sandt
- [x] Falsk

(c) (4 point) Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}} f(P)$ i punktet $P = (0, 1)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \langle 0, 1 \rangle$?

- [x] 0
- [ ] 3
- [ ] 4
- [ ] 1
- [ ] 2
- [ ] ingen af de andre

(d) (4 point) Hvilken af de følgende enhedsvektorer peger i den retning hvor f vokser hurtigst i punktet P (retningen $\mathbf{v}$ hvor $D_{\mathbf{v}} f(P)$ er størst)?

- [ ] $\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$
- [ ] $\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$
- [ ] $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$
- [x] $\langle 1, 0 \rangle$
- [ ] $\langle \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \rangle$
- [ ] $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$
- [ ] $\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$
- [ ] $\langle 0, 1 \rangle$
- [ ] ingen af de andre

Opgave 10 (9 point)

En funktion er givet ved

$$f(x) = \sin(x^2)$$

for alle reelle tal x.

(a) (5 point) Markér det korrekte udtryk for $f''(x)$ (dvs f to gange differentieret)

- [ ] $-4\sin(x^2)$
- [ ] $-x^4\sin(x^2)$
- [x] $2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$
- [ ] $2\sin(2x)$
- [ ] $2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2)$
- [ ] ingen af de andre

(b) (4 point) Hvilket af de følgende udtryk er anden ordens Taylor polynomiet for f med udviklingspunkt $x = 0$?

- [ ] $x + x^2$
- [ ] $-x + x^2$
- [ ] $2x + x^2$
- [ ] $1 + x + x^2/2$
- [x] x^2
- [ ] ingen af de andre

Opgave 11 (11 point)

En kurve i planen er givet ved

$$x(t) = 2t + 1,$$
$$y(t) = \sin(t)$$

for alle reelle tal t.

(a) (2 point) For hvilken værdi af parameteren t går kurven gennem punktet $P = (1, 0)$?

☑ 0	☐ 2π	☐ 4π
☐ π	☐ 3π	☐ ingen af de andre

(b) (4 point) Hvad er værdien af farten når $t = 0$?

☐ 0	☐ $\sqrt{2}$	☑ $\sqrt{5}$
☐ 1	☐ $\sqrt{3}$	☐ ingen af de andre

(c) (5 point) Hvad er kurvens krumning i P?

☑ 0	☐ $1\sqrt{27}$	☐ $2/\sqrt{125}$
☐ $1/\sqrt{8}$	☐ $1/\sqrt{125}$	☐ ingen af de andre

Opgave 12 (5 point)

Betragt det følgende begyndelsesværdiproblem

$$y'(x) = x\, y^2(x), \quad y(0) = 1.$$

(a) (3 point) Antag, at y løser den ovenstående ligning og definer

$$f(x) = \frac{1}{y(x)}.$$

Hvilken ligning opfylder f?

☐ $f'(x) = x, \quad f(0) = 1$	☐ $f'(x) = x^2, \quad f(0) = 0$
☑ $f'(x) = -x, \quad f(0) = 1$	☐ $f'(x) = x, \quad f(0) = 0$
☐ $f'(x) = 1, \quad f(0) = 1$	☐ ingen af de andre

(b) (2 point) Hvad er $y(x)$?

☐ $1 + x$	☑ $2/(2 - x^2)$	☐ $1/(1 - x^2)$
☐ $1/(1 + x)$	☐ $2/(2 + x^2)$	☐ ingen af de andre