Eksamen i Calculus

**Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design,
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet**

14. januar 2020

Opgave 1 (6 point)

En reel funktion er defineret ved

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y - x^2}}$$

for reelle variable x og y.

(a) (3 point) Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x, y), der opfylder

- ☐ $y = x^2$
- ☑ $y > x^2$
- ☐ $y \geq x^2$
- ☐ $y \leq x^2$
- ☐ $x, y \neq 0$
- ☐ ingen af de andre

(b) (3 point) Hvad er niveaukurven $f(x, y) = 0$?

- ☐ x-aksen
- ☐ y-aksen
- ☐ Parablen $y = 2x^2$
- ☑ Den positive del af y-aksen givet ved $y > 0$, $x = 0$
- ☐ ingen af de andre

Opgave 2 (6 point)

En parametrisk kurve i rummet er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle t,\ \frac{1}{3}t^3,\ \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\rangle,$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (2 point) Hvad er kurvens hastighedsvektor?

- ☐ $\left\langle 1, 2t^2, \sqrt{2}t \right\rangle$
- ☑ $\left\langle 1, t^2, \sqrt{2}t \right\rangle$
- ☐ $\left\langle t^2, 1, \sqrt{2}t \right\rangle$
- ☐ $\left\langle t^2, \frac{1}{9}t^6, \frac{1}{2}t^4 \right\rangle$
- ☐ $\langle 1, t^4, 2t^2 \rangle$
- ☐ ingen af de andre

(b) (2 point) Hvilken af de følgende vektorer er kurvens accelerationsvektor for $t = -1$?

- ☐ $\langle 0, \ -1, \ \sqrt{2} \rangle$
- ☐ $\langle 1, \ -2, \ \sqrt{2} \rangle$
- ☐ $\langle 0, \ -2, \ \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$
- ☐ $\langle 0, \ 1, \ \sqrt{2} \rangle$
- ☑ $\langle 0, \ -2, \ \sqrt{2} \rangle$
- ☐ ingen af de andre

(c) (1 point) Hvad er kurvens fart?

- ☑ $t^2 + 1$
- ☐ $\sqrt{1 + t^2 + \sqrt{2}t}$
- ☐ $t + 1$
- ☐ $\sqrt{1 + t^2}$
- ☐ $\sqrt{t + 1}$
- ☐ ingen af de andre

(d) (1 point) Hvad er kurvens længde fra $t = 0$ til $t = 3$?

- ☐ 1
- ☐ 7
- ☑ 12
- ☐ 10
- ☐ $\frac{5}{2}$
- ☐ ingen af de andre

Opgave 3 (6 point)

Tre komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 2 - 4i, \quad z_2 = -3 + i \quad \text{og} \quad z_3 = \pi + 7i.$$

(a) (2 point) Hvad er realdelen af e^{iz_3}?

- ☐ -7
- ☐ 0
- ☐ e^7
- ☐ π
- ☑ $-e^{-7}$
- ☐ ingen af de andre

(b) (2 point) Hvad er imaginærdelen af e^{iz_3}?

- ☑ 0
- ☐ e^7
- ☐ $e^{-\pi}$
- ☐ 7
- ☐ $-\pi$
- ☐ ingen af de andre

(c) (2 point) Hvad er $z_1 - z_2$ på polær form?

- ☐ $25e^{-i\pi/4}$
- ☐ $2\sqrt{5}e^{-i\pi/4}$
- ☐ $25e^{i7\pi/4}$
- ☐ $5e^{i\pi/4}$
- ☑ $5\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$
- ☐ ingen af de andre

Opgave 4 (10 point)

(a) (5 point) En homogen anden ordens differentialligning er givet ved

$$y'' - 3y' - 10y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk, hvori c_1 og c_2 er arbitrære reelle konstanter. Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

- ☐ $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{5t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{5t} + c_2 t$
- ☐ $y(t) = e^{2t}(c_1 \cos(5t) + c_2 \sin(5t))$
- ☐ $y(t) = e^{5t}(c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t))$
- ☐ $y(t) = (c_1 e^{5t} + c_2)e^{-2t}$
- ☐ $y(t) = (c_1 + c_2)e^{5t}$
- ☑ $y(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-2t}$
- ☐ ingen af de andre

(b) (3 point) Hvilken funktion $x_p(t)$ er en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) - 3x'(t) - 10x(t) = 20t.$$

blandt følgende funktionsudtryk:

- ☐ $x_p(t) = 20t$
- ☐ $x_p(t) = 2t$
- ☐ $x_p(t) = -\frac{1}{2} + 2t$
- ☑ $x_p(t) = \frac{3}{5} - 2t$
- ☐ $x_p(t) = -3 - 2t$
- ☐ ingen af de andre

(c) (2 point) Markér løsningen $x(t)$ til begyndelsesværdiproblemet

$$x''(t) - 3x'(t) - 10x(t) = 20t, \quad x(0) = \frac{8}{5}, \quad x'(0) = 10,$$

blandt følgende funktionsudtryk:

- ☐ $x(t) = -e^{5t} - 3e^{-2t} + \frac{3}{5} - 2t$
- ☐ $x(t) = \frac{1}{5}e^{5t} - 2te^{-2t} - \frac{1}{2} + 2t$
- ☐ $x(t) = e^{5t} + 2e^{-2t} - \frac{1}{2} + 2t$
- ☐ $x(t) = (\frac{3}{5}e^{5t} - 1)e^{-2t} + 2t$
- ☑ $x(t) = 2e^{5t} - e^{-2t} + \frac{3}{5} - 2t$
- ☐ ingen af de andre

Opgave 5 (8 point)

Markér om de følgende udsagn er sandt eller falsk:

(a) (2 point) For funktionen $f(x, y) = \cos^2(e^{x+y})$ gælder at $f_{xy} = f_{yx}$.

- ☑ Sandt
- ☐ Falsk

(b) (2 point) $\sin^{-1}(\sin(\frac{5\pi}{2})) = \frac{5\pi}{2}$.

☐ Sandt ☑ Falsk

(c) (2 point) $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

☑ Sandt ☐ Falsk

(d) (2 point) $y' = x + 2y$ er en separabel differentialligning.

☐ Sandt ☑ Falsk

Opgave 6 (7 point)

Lad $\mathcal{R}$ være området i planen givet ved alle punkter indenfor og på trekanten med hjørnepunkterne $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(1,0)$ og lad f være en funktion defineret på $\mathcal{R}$ givet ved $f(x,y) = xy$.

(a) (2 point) Hvilken af de følgende par af uligheder viser, at et punkt med koordinater (x,y) tilhører $\mathcal{R}$?

☐ $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$

☐ $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

☑ $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

☐ $0 \leq y \leq 1$, $-1 \leq x \leq 2y + 1$

☐ ingen af de andre

(b) (3 point) Hvilken af de følgende integraler beskriver dobbeltintegralet $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA$?

☐ $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^1 xy\, dxdy$

☐ $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} xy\, dxdy$

☐ $\displaystyle\int_{-1}^{2y+1} \int_0^1 xy\, dydx$

☑ $\displaystyle\int_{-1}^1 x \int_0^{-\frac{1}{2}(x-1)} y\, dydx$

☐ $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^{2y+1} xy\, dxdy$

☐ ingen af de andre

(c) (2 point) Hvilket af de følgende tal beskriver værdien af dobbeltintegralet $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA$?

☑ $-\frac{1}{6}$

☐ 0

☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{7}{6}$

☐ -1

☐ ingen af de andre

Opgave 7 (8 point)

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af alle punkterne med koordinater (x, y), som opfylder ulighederne $x^2 + y^2 \leq 2$ og $y \geq 0$. Funktionen f er defineret på $\mathcal{R}$ og givet ved $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

(a) (3 point) Hvilken af følgende muligheder beskriver området $\mathcal{R}$?

- ☐ En cirkelskive med radius 1 og centrum i origo
- ☐ En cirkelskive med radius 2 og centrum i origo
- ☐ En cirkelskive med radius $\sqrt{2}$ og centrum i origo
- ☐ En øvre halv cirkelskive med radius 2 og centrum i origo
- ☑ En øvre halv cirkelskive med radius $\sqrt{2}$ og centrum i origo
- ☐ ingen af de andre

(b) (4 point) Marker det korrekte udsagn:

- ☐ $\langle 0, 1\rangle$ er et indre kritisk punkt
- ☐ $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ er et indre kritisk punkt
- ☐ $\langle 0, 0\rangle$ er et indre kritisk punkt
- ☐ $\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$ er et indre kritisk punkt
- ☑ der findes ingen indre kritiske punkter
- ☐ ingen af de andre

(c) (1 point) Hvad er den minimale værdi af f på $\mathcal{R}$?

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☑ e^{-2}
- ☐ 0
- ☐ e^{-1}
- ☐ ingen af de andre

Opgave 8 (12 point)

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = \sin(\pi x y z^{3/2})$$

(a) (4 point) Hvilken af de følgende udtryk udgør gradientvektoren $\nabla F(P)$ i punktet $P = (-1, -1, 1)$?

- ☐ $\langle -\pi, -\pi, \pi\rangle$
- ☑ $\langle \pi, \pi, -\frac{3}{2}\pi\rangle$
- ☐ $\langle 1, 1, \frac{3}{2}\rangle$
- ☐ $\langle 1, 1, -1\rangle$
- ☐ $\langle 0, 0, 0\rangle$
- ☐ ingen af de andre

(b) (4 point) Hvilken af de følgende ligninger udgør tangentplanen til $\mathcal{F}$ i punktet $P = (-1, -1, 1)$?

- [x] $3z = 2x + 2y + 7$
- [ ] $3z = 2x + y$
- [ ] $-7z = 2x + 2y$
- [ ] $x + y - z = \frac{5}{2}$
- [ ] $2z = 3y + 2x + 7$
- [ ] ingen af de andre

(c) (4 point) Hvad er den partielle afledede $\partial z/\partial x$ i punktet $P = (-1, -1, 1)$?

- [ ] -1
- [ ] $-\frac{2}{3}$
- [x] $\frac{2}{3}$
- [ ] 0
- [ ] $-\frac{1}{3}$
- [ ] ingen af de andre

Opgave 9 (12 point)

Lad funktionen f være givet ved

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

for alle reelle tal x og y. Lad $\mathcal{R}$ være området i planen bestående af alle punkter (x, y), som opfylder uligheden $x^2 + y^2 \leq 1$.

(a) (2 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: $\nabla f(0, 0) = \langle 0, 0 \rangle$.

- [ ] Sandt
- [x] Falsk

(b) (2 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dA \geq 2$.

- [x] Sandt
- [ ] Falsk

(c) (4 point) Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}} f(P)$ i punktet $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \langle \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \rangle$?

- [ ] 0
- [ ] 3
- [ ] 4
- [x] 1
- [ ] 2
- [ ] ingen af de andre

(d) (4 point) Hvilken af de følgende udtryk er den partielle afledede f_{xy}?

- [ ] $\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- [ ] $\dfrac{2x + 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- [ ] $\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$
- [x] $\dfrac{-xy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$
- [ ] $\dfrac{2x + 2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$
- [ ] $\dfrac{-4xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$
- [ ] ingen af de andre

Opgave 10 (9 point)

En funktion er givet ved

$$f(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$$

for alle reelle tal $x > 0$.

(a) (5 point) Markér det korrekte udtryk for $f''(x)$ (dvs. f to gange differentieret)

- ☐ $\frac{6+4\ln(x)}{x^3}$
- ☐ $\frac{-2}{x^2}$
- ☐ $-\frac{1}{x^2}$
- ☑ $\frac{4\ln(x)-6}{x^3}$
- ☐ $\frac{2-2\ln(x)}{x}$
- ☐ ingen af de andre

(b) (4 point) Hvilket af de følgende udtryk er anden ordens Taylor polynomiet for f med udviklingspunkt $a = 1$?

- ☐ $2(x-1)+3(x-1)^2$
- ☐ $-3x^2+2x$
- ☐ $-3x^2+6x-2$
- ☑ $-3x^2+8x-5$
- ☐ $-3x^2+2x+1$
- ☐ ingen af de andre

Opgave 11 (11 point)

En kurve i planen er givet ved

$$x(t) = \cos(t),$$
$$y(t) = \sin(2t)$$

for alle reelle tal $t \geq 0$.

(a) (2 point) Hvad er den mindste værdi af parameteren t, hvor kurven går gennem punktet $(-1, 0)$?

- ☑ π
- ☐ 0
- ☐ $\frac{3\pi}{2}$
- ☐ $\frac{\pi}{2}$
- ☐ 2π
- ☐ ingen af de andre

(b) (4 point) Hvad er værdien af krumningen når $t = \frac{\pi}{2}$?

- ☑ 0
- ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ☐ $\frac{3}{8}$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 1
- ☐ ingen af de andre

(c) (5 point) Hvad er kurvens krumning i punktet $(-1, 0)$?

- [ ] 1
- [x] $\frac{1}{4}$
- [ ] $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- [ ] 0
- [ ] $\frac{1}{2}$
- [ ] ingen af de andre

Opgave 12 (5 point)

Betragt det følgende første ordens differentialligning

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = -x^2,$$

for alle $x > 0$.

(a) (3 point) Hvad er den fuldstændige løsning til ovenstående differentialligning?

- [x] $-\frac{1}{4}x^3 + c\frac{1}{x}$
- [ ] $-x^2 - cx$
- [ ] $\frac{1}{4}x^5 - cx$
- [ ] $c\frac{1}{x}$
- [ ] $-x^2 + c\frac{1}{x}$
- [ ] ingen af de andre

(b) (2 point) Hvad er løsningen til begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = -x^2, \quad y(1) = \frac{1}{2},$$

for alle $x > 0$.

- [ ] $-\frac{1}{4}x^3$
- [ ] $\frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{4}x$
- [ ] $\frac{1}{2x}$
- [x] $-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4x}$
- [ ] $-x^2 - \frac{3}{2x}$
- [ ] ingen af de andre