To find the English version of the exam, please read from the other end!

Se venligst bort fra den engelske version på bagsiden hvis du følger denne danske version af prøven.

Eksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design,
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

15. juni 2018

Dette eksamenssæt består af 8 nummererede sider med 12 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. I hver delopgave skal der kun afkrydses én svarmulighed. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger.

Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder. Du bedes også afkrydse det hold som du deltager i.

Held og lykke!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMER: ______________________________

☐	Hold 1: LAND – ST	Horia Cornean
☐	Hold LAN (København)	Iver Ottosen
☐	Hold BBIO – MOE (København)	Oliver Matte

Facit

Opgave 1 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x,y) = e^{y-x^2}$$

for reelle variable x og y.

(a) (2 point) Markér det korrekte udtryk for niveaukurven $f(x,y) = 1$.

☐ $y = x^2 + 1$ ☑ $y = x^2$ ☐ $x = \sqrt{e^y - 1}$

☐ $y = x^2 + e$ ☐ $y = \ln(x^2 + 1)$ ☐ $x = \ln(1 - y)$

(b) (2 point) Hvilken af de følgende vektorer er parallel med $\nabla f(0,0)$?

☐ $\langle 1,0 \rangle$ ☐ $\langle 1,4 \rangle$ ☐ $\langle 1,1 \rangle$ ☐ $\langle 2,1 \rangle$ ☑ $\langle 0,2 \rangle$

(c) (2 point) Hvilket af de følgende udtryk er den partielle afledede f_{xy}?

☐ $-2xe^{y-x2}$ ☑ $-2xe^{y-x^2}$ ☐ $(1-2x)e^{y-x^2}$

☐ e^{y-x^2} ☐ 0 ☐ e^{-2x}

Opgave 2 (10 point)

En parametrisk kurve i rummet er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle \tfrac{1}{3}t^3, \ t, \ \tfrac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\rangle$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (4 point) Markér det korrekte udtryk for farten $v(t)$.

☑ $t^2 + 1$ ☐ $\sqrt{\frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{2}t^4 + t^2}$ ☐ $\sqrt{2}t(t+1)$

☐ $\sqrt{t^4 + 2t^2} + 1$ ☐ $t^2 + \sqrt{2}t + 1$ ☐ $2t^2 + \sqrt{2}$

(b) (3 point) Hvad er buelængden af kurven fra $t = 0$ til $t = 3$?

☐ 4 ☐ 8 ☐ 10 ☑ 12 ☐ 15

(c) (3 point) Hvilken af de følgende vektorer er kurvens accelerationsvektor for $t = 2$?

☐ $\langle \frac{8}{3}, 2, 2\sqrt{2} \rangle$ ☐ $\langle 2,0,0 \rangle$ ☐ $\langle 2, 0, \sqrt{2} \rangle$

☐ $\langle 4, 1, 2\sqrt{2} \rangle$ ☑ $\langle 4, 0, \sqrt{2} \rangle$ ☐ $\langle \frac{8}{3}, 2, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$

Opgave 3 (6 point)

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 5e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \text{og} \quad z_2 = 2i\left(\tfrac{3}{2} - 2i\right).$$

(a) (3 point) Hvad er z_1 på standard form?

- ☐ $\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$
- ☐ $\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$
- ☐ $-\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$
- ☑ $\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$
- ☐ $5i$
- ☐ $10\sqrt{2} + 10\sqrt{3}i$

(b) (3 point) For alle komplekse tal w_1 og w_2 gælder regnereglerne $|\overline{w_1}| = |w_1|$ og $|w_1 w_2| = |w_1||w_2|$. Hvad er $|2\,z_1{}^2\,\overline{z_2}|$?

- ☐ 50
- ☐ 125
- ☑ 250
- ☐ 325
- ☐ 380

Opgave 4 (10 point)

En homogen anden ordens differentialligning er givet ved

$$2y'' + 3y' - 2y = 0.$$

(a) (5 point) Herunder er angivet en række funktionsudtryk hvori c_1 og c_2 er arbitrære reelle konstanter. Markér det udtryk som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

- ☐ $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$
- ☐ $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-t}\cos(t) + c_2 e^{-t}\sin(t)$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{3t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{\frac{1}{2}t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{\frac{1}{2}t} + c_2 e^{2t}$
- ☑ $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{\frac{1}{2}t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$

(b) (5 point) Det oplyses at $x_p(t) = -t - 2$ er en partikulær løsning til

$$2x'' + 3x' - 2x = 2t + 1.$$

Markér den entydige løsning til begyndelsesværdiproblemet givet ved

$$2x'' + 3x' - 2x = 4t + 2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

blandt følgende funktionsudtryk.

- ☐ $x(t) = 2e^{\frac{1}{2}t} + 4t + 2$
- ☐ $x(t) = 4e^{\frac{1}{2}t} - t - 2$
- ☑ $x(t) = 4e^{\frac{1}{2}t} - 2t - 4$
- ☐ $x(t) = 2e^{-2t} + 3e^{\frac{1}{2}t} - 2t - 4$
- ☐ $x(t) = 3te^{-2t} - 2t - 4$
- ☐ $x(t) = 4e^{-2t} - 2t - 4$
- ☐ $x(t) = 4e^{-2t} + 4t + 2$
- ☐ $x(t) = \cos(t) - \sin(t) - t - 2$

Opgave 5 (8 point)

En funktion er givet ved

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

for reel variabel x.

(a) (4 point) Markér det korrekte udtryk for $f''(x)$ (*hint: husk at bruge kædereglen og produktreglen*).

- ☐ $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$
- ☐ $\frac{-1}{x^2+1}$
- ☑ $\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$
- ☐ $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- ☐ $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- ☐ $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$

(b) (4 point) Hvilket af de følgende udtryk er anden ordens Taylor polynomiet for f med udviklingspunkt $x = 0$?

- ☐ $2 + x + x^2$
- ☐ $1 + x$
- ☐ $x - x^2$
- ☐ $\frac{1}{2} - x + 2x^2$
- ☐ $1 - \frac{1}{2}x + x^2$
- ☐ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2$
- ☑ $1 + \frac{1}{2}x^2$
- ☐ $1 + \frac{3}{2}x^2$
- ☐ $\sqrt{2} + x^2$

Opgave 6 (6 point)

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af alle punkter indenfor og på trekanten med hjørner i punkterne $A = (-1, 0)$, $B = (0, 0)$ og $C = (0, 2)$. Et legeme med massetæthed $\delta(x, y) = x^2y^2$ dækker området $\mathcal{R}$.

(a) (3 point) Hvilken af de følgende uligheder viser, at et punkt med koordinater (x, y) tilhører $\mathcal{R}$?

- ☐ $-1 \le x \le 0, \quad 0 \le y \le 2$
- ☐ $0 \le y \le 2, \quad -1 \le x \le 2y$
- ☐ $0 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 0$
- ☐ $x = 0, \quad y = 2$
- ☑ $-1 \le x \le 0, \quad 0 \le y \le 2x + 2$
- ☐ $y = 2x + 2$

(b) (3 point) Hvad er den korrekte formel som giver legemets masse?

- ☐ $\int_{-1}^{0} \int_{0}^{2} x^2y^2 \, dydx$
- ☐ $\int_{-1}^{0} \int_{0}^{2x+2} 1 \, dxdy$
- ☐ $\int_{-1}^{0} \int_{0}^{1} 1 \, dxdy$
- ☐ $\int_{-1}^{0} \int_{0}^{2x+2} x^2y^2 \, dxdy$
- ☑ $\int_{-1}^{0} \int_{0}^{2x+2} x^2y^2 \, dydx$
- ☐ $\int_{0}^{2} \int_{-1}^{0} x^2y^2 \, dxdy$

Opgave 7 (6 point)

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af alle punkterne med koordinater (x, y) som opfylder to uligheder:

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq x.$$

Markér værdien af planintegralet

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{x}{x^2 + y^2}\, dA.$$

☐ 2π ☐ π ☐ 0

☑ 2 ☐ $\pi/2$ ☐ -2

Opgave 8 (10 point)

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = \cos(z) + 2z + xy - x^2.$$

(a) (5 point) Hvilken af de følgende ligninger udgør tangentplanen til $\mathcal{F}$ i punktet $P = (1, 0, 0)$?

☐ $1 = \frac{1}{2}x + y + z$ ☑ $z = x - \frac{1}{2}y - 1$ ☐ $z = 2$

☐ $y = 2 - x - 1$ ☐ $1 = x - 2y + 2z$ ☐ $0 = -2x + y + 2z$

(b) (5 point) Fra ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvad er den partielle afledede $\partial z / \partial x$ i punktet P?

☐ -2 ☐ 0 ☑ 1

☐ π ☐ 5 ☐ 7

Opgave 9 (14 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \sqrt{2x^2 - xy + 2}$$

for reelle variable x og y.

(a) (2 point) Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x, y) der opfylder

- [x] $xy \leq 2x^2 + 2$
- [ ] $2x^2 - xy \leq 2$
- [ ] $y \leq 2x^2 + 2$
- [ ] $2x^2 - xy + 2 \leq 0$
- [ ] $x \geq \sqrt{\frac{1}{2}xy - 1}$
- [ ] $y \leq 2x + 2$

(b) (3 point) Hvilket af de følgende punkter er et kritisk punkt for f?

- [ ] $(1, 4)$
- [ ] $(5, 1)$
- [x] $(0, 0)$
- [ ] $(0, 4)$
- [ ] $(-1, -1)$
- [ ] $(2, 3)$

(c) (4 point) Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (0, 1)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$?

- [ ] -1
- [x] $-\frac{1}{4}$
- [ ] $\frac{1}{2}$
- [ ] $-\frac{1}{2}$
- [ ] $\frac{1}{4}$
- [ ] 1

(d) (5 point) Hvilken af de følgende enhedsvektorer peger i den retning hvor f aftager hurtigst i punktet P (retningen $\mathbf{v}$ hvor $D_{\mathbf{v}}f(P)$ er mindst)?

- [ ] $\langle 0, 1 \rangle$
- [ ] $\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$
- [x] $\langle 1, 0 \rangle$
- [ ] $\langle 0, -1 \rangle$
- [ ] $\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$
- [ ] $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$
- [ ] $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$
- [ ] $\langle -1, 0 \rangle$
- [ ] $\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$

Opgave 10 (8 point)

Betragt følgende første ordens differentialligning

$$\frac{dy}{dx} = 3y + yx.$$

(a) (1 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: Differentialligningen er separabel.

☑ Sandt ☐ Falsk

(b) (4 point) Differentialligningen har en løsning der opfylder betingelsen $y(0) = 2$. Hvad er $y(1)$ for denne løsning?

☐ 2 ☑ $2e^{\frac{7}{2}}$ ☐ $3e^{\frac{7}{2}}$ ☐ $3e^{\frac{1}{2}}$ ☐ $2e^{\frac{1}{2}}$

(c) (3 point) Differentialligningen har en *anden* løsning der opfylder betingelsen $y'(0) = 2$. Hvad er $y(0)$ for denne løsning?

☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☑ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ 2

Opgave 11 (11 point)

En kurve i planen er givet ved

$$x = \cos(t) + t,$$
$$y = t^2 + 2t + 1.$$

(a) (2 point) For hvilken værdi af parameteren t går kurven gennem punktet $P = (1, 1)$?

☐ $-\pi$ ☐ -1 ☐ $-\frac{\pi}{4}$ ☑ 0 ☐ 1

(b) (4 point) Hvad er kurvens krumning i P?

☐ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ☑ $\frac{4}{5\sqrt{5}}$ ☐ $\frac{4}{5}$ ☐ $\frac{3}{5\sqrt{5}}$ ☐ $\frac{5}{3\sqrt{5}}$

(c) (5 point) Følgende svarmuligheder er alle forskellige parametriseringer af tangentlinjen til kurven i punktet P. Hvilken af svarmulighederne har konstant fart lig 1 for alle værdier af t?

☐ $\langle 1 + \frac{e^t - e^{-t}}{2\sqrt{5}}, 1 + \frac{e^t - e^{-t}}{\sqrt{5}} \rangle$ ☑ $\langle 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}t, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}t \rangle$

☐ $\langle 1 + \frac{1}{3\sqrt{5}}t^3, 1 + \frac{2}{3\sqrt{5}}t^3 \rangle$ ☐ $\langle 1 + \frac{1}{3\sqrt{5}}(t-1)^3, 1 + \frac{2}{3\sqrt{5}}(t-1)^3 \rangle$

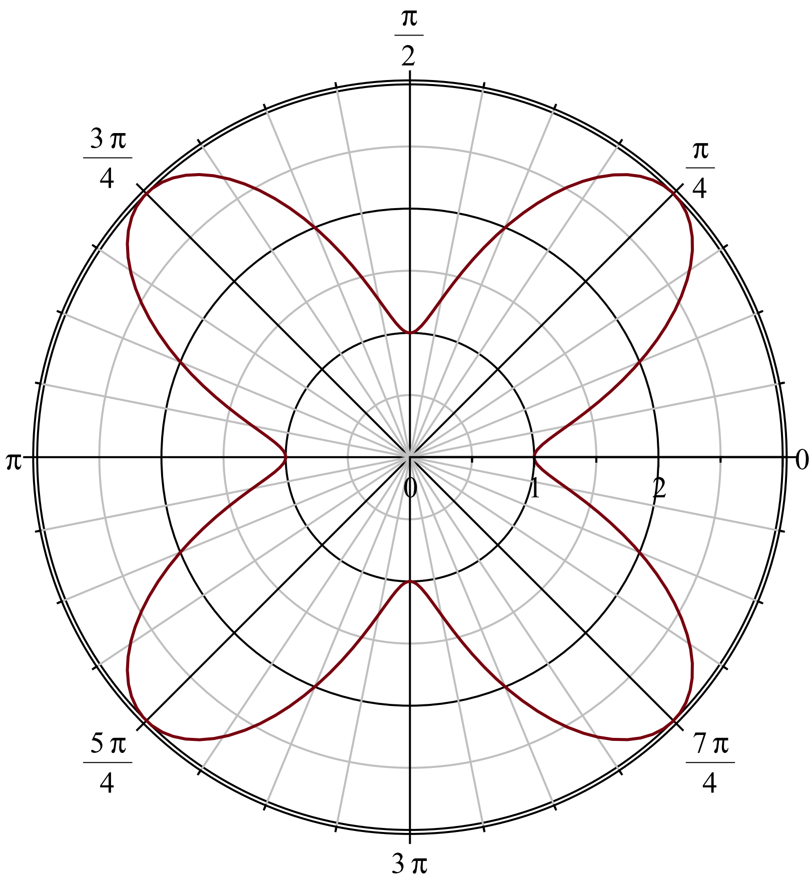
☐ $\langle 1 + t^3, 1 + 2t^3 \rangle$ ☐ $\langle 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}t, 1 + \frac{6}{\sqrt{5}}t \rangle$

Opgave 12 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for en funktion

$$r = f(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

afbildet i polære koordinater.



En af forskrifterne for f i listen nedenfor svarer til figuren. Hvilken?

☐ $f(\theta) = \sin(4\theta) - \cos(4\theta)$

☐ $f(\theta) = \theta \sin(4\theta)$

☐ $f(\theta) = \sin(4\theta) - 2$

☐ $f(\theta) = \cos(2\theta)$

☑ $f(\theta) = 2 - \cos(4\theta)$

☐ $f(\theta) = 2 + \sin(2\theta)$