

Eksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

5. januar 2018

Dette eksamenssæt består af 8 nummererede sider med 12 afkrydningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger. Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

Held og lykke!

NAVN:

STUDIENUMMMER:

Facit

Opgave 1 (9 point)

(a) (5 point). En anden ordens differentiaalligning er givet ved

$$y'' + 4y' + 29y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk, hvori c_1 og c_2 er arbitrære konstanter. Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentiaalligningen.

- $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t}$
- $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{5t}$
- $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}$
- $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$
- $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}$
- $y(t) = c_1 e^{-2t} \cos(5t) + c_2 e^{-2t} \sin(5t)$
- $y(t) = c_1 e^{-t} \cos(4t) + c_2 e^{-t} \sin(4t)$
- $y(t) = c_1 e^{2t} \cos(3t) + c_2 e^{2t} \sin(3t)$

(b) (4 point). Betragt nu den inhomogene ligning

$$y'' + 4y' + 29y = 13e^{-3t}.$$

Hvilken af følgende funktioner er en partikulær løsning til ligningen?

- | | | | |
|--|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> $t^2 + e^{-3t+1}$ | <input type="checkbox"/> $2e^{3t}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{3}e^{3t}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{1}{2}e^{-3t}$ |
| <input type="checkbox"/> $2e^{-3t}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}e^{-3t}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{9}e^t + e^{-t}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{2}{3}e^{-3t+1}$ |

Opgave 2 (6 point)

En flade \mathcal{F} i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = x^3 - y^3 + 2z^3 - 9.$$

Fladen \mathcal{F} har en tangentplan i punktet $P = (2, 1, 1)$. Markér en ligning for denne tangentplan blandt følgende muligheder:

$3x - 3y + 12z = 15$

$2x - 2y + 7z = 5$

$x - 2y + z = 1$

$-3x + 2y + 6z = 11$

$9x + y + 6z = 25$

$x - 2y - z = 1$

$12x - 3y + 6z = 27$

$x - 3y + 5z = -3$

Opgave 3 (10 point)

En plan kurve er givet ved

$$\begin{aligned}x &= t - 2t^2, \\y &= 2t + t^2,\end{aligned}$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (2 point). Hvilket punkt på kurven svarer til parameterværdien $t = 1$?

$(1, 4)$

$(-1, 1)$

$(-1, 2)$

$(3, 4)$

$(-1, 3)$

$(5, 4)$

$(-3, 4)$

$(-5, 4)$

(b) (4 point). Hvad er kurvens krumning for $t = 1$?

$\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{2}{25}$

5

$\frac{1}{2}$

$\sqrt{3}$

$\frac{1}{9}$

$\sqrt{11}$

(c) (4 point). For hvilken værdi af parameteren t er krumningen maksimal?

-2

0

3

5

$-\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}$

$\frac{7}{2}$

9

Opgave 4 (7 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x) = (4x + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

(a) (3 point). Hvad er den dobbelt afledede $f''(x)$?

- | | | |
|--|--|---|
| <input type="checkbox"/> $(4x + 1)^{-\frac{1}{2}}$ | <input type="checkbox"/> $2x^{-\frac{1}{2}}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}(4x + 1)^{\frac{1}{2}}$ |
| <input type="checkbox"/> $-\frac{1}{4}(4x + 1)^{-\frac{3}{2}}$ | <input type="checkbox"/> $6x^{-\frac{3}{2}}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $-4(4x + 1)^{-\frac{3}{2}}$ |

(b) (4 point). Hvilket af nedenstående polynomier er tredje ordens Taylor polynomiet for f med udviklingspunkt $x = 0$?

- | | | |
|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> $1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ | <input type="checkbox"/> $1 - \frac{1}{2}x^3$ | <input type="checkbox"/> $2 + 4x^2 - \frac{1}{2}x^3$ |
| <input type="checkbox"/> $1 - x + x^2 - 6x^3$ | <input type="checkbox"/> $1 + 3x + x^2 + 2x^3$ | <input checked="" type="checkbox"/> $1 + 2x - 2x^2 + 4x^3$ |

Opgave 5 (10 point)

En partikkel bevæger sig langs en kurve i rummet. Positionsvektoren for partiklen til tiden t er

$$\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t \rangle.$$

(a) (3 point). Hvad er hastighedsvektoren $\mathbf{v}(t)$?

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $\langle e^t, -e^{-t}, \frac{1}{2\sqrt{2}}t \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle te^{t-1}, -te^{-t-1}, 0 \rangle$ |
| <input type="checkbox"/> $\langle e^t, e^{-t}, 1 \rangle$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\langle e^t, -e^{-t}, \sqrt{2} \rangle$ |
| <input type="checkbox"/> $\langle e^t, -e^{-t}, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle e^t, e^{-t}, t \rangle$ |

(b) (4 point). Hvad er farten $v(t)$?

- | | |
|--|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> $e^t + e^{-t}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + \frac{1}{8}t}$ |
| <input type="checkbox"/> $e^t + e^{-t} + \sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> $2e^{2t} + 2t$ |
| <input type="checkbox"/> $\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + t^2}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2t^2}$ |

(c) (3 point). Partiklen gennemløber et stykke af bevægelseskurven i tidsrummet $0 \leq t \leq 1$. Hvad er buelængden af dette kurvestykke?

- | | |
|-------------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> e^2 | <input checked="" type="checkbox"/> $e - e^{-1}$ |
| <input type="checkbox"/> $2e + 1$ | <input type="checkbox"/> $e - e^{-1} + \sqrt{2}$ |
| <input type="checkbox"/> $\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> $3 \ln(2)$ |

Opgave 6 (6 point)

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = \frac{1+i}{3-2i}, \quad z_2 = \frac{2i}{1+i}$$

(a) (3 point). Hvad er z_1 skrevet på standard form?

- | | | | |
|---|--|-------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> $2 + 3i$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$ | <input type="checkbox"/> $8i$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$ |
| <input type="checkbox"/> $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ | <input type="checkbox"/> $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}i$ | <input type="checkbox"/> -5 | <input type="checkbox"/> $-2 - i$ |

(b) (3 point). Hvad er z_2 skrevet på polær form?

- | | | | |
|--|--|---|---|
| <input type="checkbox"/> $2e^{i\pi/3}$ | <input type="checkbox"/> $2e^{i\pi}$ | <input type="checkbox"/> $2e^{i\pi/2}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{6}e^{i\pi/4}$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{2}e^{-i\pi/3}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}e^{-i\pi}$ | <input type="checkbox"/> $5e^{3i\pi/4}$ |

Opgave 7 (8 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \frac{4x - 2y^2 - 3}{x^2 - y^2}.$$

Afkryds den rigtige mulighed i hvert delspørgsmål herunder.

(a) (4 point). Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x, y) , der opfylder

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $x > 0$ og $y > 0$ | <input checked="" type="checkbox"/> $y \neq x$ og $y \neq -x$ |
| <input type="checkbox"/> $x > y$ | <input type="checkbox"/> $x \neq 0$ og $y \neq 0$ |
| <input type="checkbox"/> $4x + 5 \geq 0$ | <input type="checkbox"/> $x \neq 0$ eller $y \neq 0$ |

(b) (4 point). Niveaukurven med ligning $f(x, y) = 1$ kan beskrives som:

- En parabel med ligning $y = 2x^2 + \frac{5}{2}$.
- En parabel med ligning $y = x^2 - 2x + 4$.
- En ret linje gennem $(0, 5)$ med hældningskoefficienten 4.
- En ret linje gennem $(0, 2)$ med hældningskoefficienten 2.
- En cirkel med centrum i $(-2, 1)$ og radius $\frac{1}{2}$.
- En cirkel med centrum i $(2, 0)$ og radius 1.

Opgave 8 (14 point)

En funktion er defineret som

$$f(x, y) = xy^2 - 6x^2 - 3y^2.$$

(a) (2 point). Hvad er funktionsværdien $f(1, 1)$?

- | | | | |
|--|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> -10 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> -8 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 11 |

(b) (4 point). Hvilke af følgende punkter er kritiske punkter for f ? (Bemærk: Hver forkert afkrydsning i dette spørgsmål ophæver én rigtig afkrydsning.)

- | | | | |
|--|--|---|-----------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> (0, 0) | <input type="checkbox"/> (-1, 1) | <input type="checkbox"/> (2, 3) | <input type="checkbox"/> (4, 2) |
| <input type="checkbox"/> (1, 1) | <input checked="" type="checkbox"/> (3, 6) | <input checked="" type="checkbox"/> (3, -6) | <input type="checkbox"/> (4, -16) |

(c) (4 point). Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (-1, 1)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\langle 1, 1 \rangle$?

- | | | | |
|---|---|-----------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> $2\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{\sqrt{2}}{4}$ | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> $\frac{\sqrt{6}}{2}$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ | <input type="checkbox"/> $10\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> -7 | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{3}$ |

(d) (4 point). Hvilken af følgende ligninger er en ligning for tangentplanen til grafen for f i punktet $Q = (1, 1, f(1, 1))$?

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $x + 2y - z = 11$ | <input checked="" type="checkbox"/> $11x + 4y + z = 7$ |
| <input type="checkbox"/> $2x - 3y + z = -9$ | <input type="checkbox"/> $x + y - z = 1$ |
| <input type="checkbox"/> $9x + 10y - z = 13$ | <input type="checkbox"/> $10x + y + z = 3$ |

Opgave 9 (5 point)

Lad

$$g(x, y, z) = \arctan(x^2 + y^2 - z^2).$$

I hvilken retning ud fra punktet $P = (1, -1, 1)$ er den retningsafledede af funktionen g størst? Markér en enhedsvektor herunder, som peger i denne retning.

- | | |
|---|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{\sqrt{3}}{3}\langle 1, -1, -1 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{3}\langle 2, 2, 1 \rangle$ |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\sqrt{2}}{2}\langle 1, 1, 0 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{3}\langle -2, 1, 2 \rangle$ |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\sqrt{2}}{2}\langle -1, 0, 1 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{5}\langle 3, -4, 0 \rangle$ |

Opgave 10 (10 point)

Et område \mathcal{R} i planen består af de punkter (x, y) , som opfylder ulighederne

$$0 \leq x, \quad 0 \leq y, \quad x^2 + y^2 \leq 16.$$

Markér værdien af planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} x \sqrt{x^2 + y^2} dA.$$

- | | | | | |
|--|---|-----------------------------|--|------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $\frac{5}{4}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{55}{4}$ | <input type="checkbox"/> 8 | <input checked="" type="checkbox"/> 64 | <input type="checkbox"/> 91 |
| <input type="checkbox"/> $\frac{5}{2}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{47}{2}$ | <input type="checkbox"/> 55 | <input type="checkbox"/> 72 | <input type="checkbox"/> 121 |

Opgave 11 (10 point)

Et område \mathcal{T} i rummet består af de punkter (x, y, z) , som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 5 - xy.$$

Et legeme med massefylde (densitet) $\delta(x, y, z) = x$ dækker netop området \mathcal{T} .

(a) (5 point). Hvad er rumfanget (volumen) af \mathcal{T} ?

- | | | | | |
|--|--|---|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $\frac{1}{3}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{3}{2}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{22}{3}$ | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 9 |
| <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{7}{2}$ | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 11 |

(b) (5 point). Hvad er massen af legemet, der dækker \mathcal{T} ?

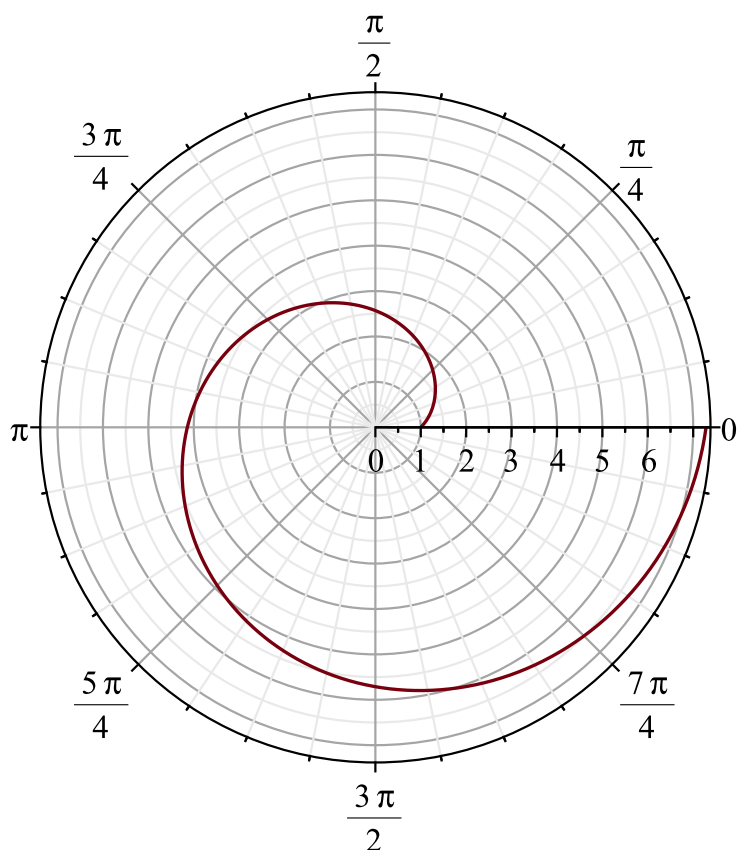
- | | | | | |
|--|---|----------------------------|----------------------------|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{13}{3}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{15}{2}$ | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 10π |
| <input type="checkbox"/> $\frac{11}{2}$ | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> $\frac{4\pi}{7}$ |

Opgave 12 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f svarer til figuren?

$f(\theta) = 1 + \sin \theta$

$f(\theta) = \sin(2\theta)$

$f(\theta) = 1 + \theta$

$f(\theta) = 1 + \cos \theta$

$f(\theta) = 1 - 2 \sin \theta$

$f(\theta) = 1 + \theta^2$