

# Trigonometriske formler

I kompendium i calculus side 2 er der opført en række trigonometriske formler, som er meget anvendelige i forbindelse med omskrivninger af diverse udtryk. Her følger en udledning af formlerne plus lidt mere.

## 1 Grundrelationen mellem sin og cos

Punktet på enhedscirklen svarende til vinkeldrejningen  $x$  har koordinaterne  $\cos x$  og  $\sin x$ . Ved indsættelse i cirkelns ligning får vi

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

## 2 Grundrelationen mellem tan og cot

Det fremgår umiddelbart af definitionen på tan og cot, at

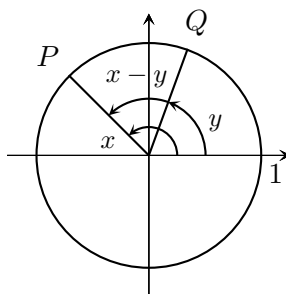
$$\tan x \cot x = 1.$$

## 3 Additionsformlerne

Lad  $P = (\cos x, \sin x)$  og  $Q = (\cos y, \sin y)$ . Dermed er

$$\cos(x - y) = \vec{OP} \cdot \vec{OQ},$$

da  $|\vec{OP}| = |\vec{OQ}| = 1$ .



Vi har derfor, at

$$\begin{aligned}\cos(x - y) &= (\cos xi + \sin xj) \cdot (\cos yi + \sin yj) \\ &= \cos x \cos y + \sin x \sin y.\end{aligned}\tag{1}$$

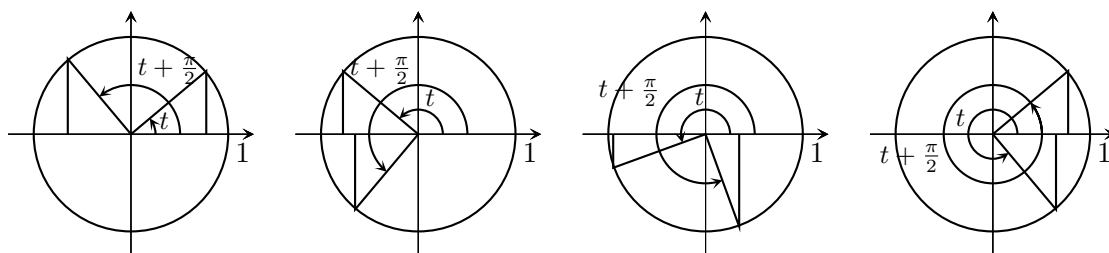
Sættes  $y := -y$  i (1), får vi <sup>1</sup>

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,\tag{2}$$

da  $\cos$  er en lige funktion, og  $\sin$  er en ulige funktion.

Bemærk, at uanset placering i kvadrant gælder

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t \quad \text{og} \quad \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t.$$



Vi sætter nu  $y := y + \frac{\pi}{2}$  i (2), og får

$$\begin{aligned}\cos\left(x + y + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \sin x \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \\ \Downarrow \\ -\sin(x + y) &= \cos x(-\sin y) - \sin x \cos y \\ \Downarrow \\ \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y.\end{aligned}\tag{3}$$

I (3) sættes  $y := -y$ , og vi får

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.\tag{4}$$

Traditionelt angives alle formlerne (1) - (4), selvom (2) og (3) er tilstrækkelige, når vi ved, at  $\cos$  er lige og  $\sin$  er ulige.

Sammenfattende kan vi skrive

$$\begin{aligned}\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y.\end{aligned}$$

Ved division og efterfølgende forkortning med  $\cos x \cos y$  får vi

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

---

<sup>1</sup> Symbolet  $:=$  (kolon lig med) kaldes det dynamiske lighedstegn. Det angiver, at venstresiden skal erstattes med højresiden.

## 4 Komplementvinkel og supplementvinkel

Additionsformlerne (1) og (4) anvendt på  $\frac{\pi}{2} - x$ :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin x \sin\frac{\pi}{2} = 0\cos x + 1\sin x = \sin x, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x = 1\cos x - 0\sin x = \cos x.\end{aligned}$$

Ved division får vi

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$$

For komplementvinklen  $\frac{\pi}{2} - x$  til  $x$  har vi sammenfattende:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x, & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cot x, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x, & \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \tan x.\end{aligned}$$

Additionsformlerne (1) og (4) anvendt på  $\pi - x$ :

$$\begin{aligned}\cos(\pi - x) &= \cos\pi\cos x + \sin\pi\sin x = -1\cos x + 0\sin x = -\cos x, \\ \sin(\pi - x) &= \sin\pi\cos x - \cos\pi\sin x = 0\cos x - (-1)\sin x = \sin x.\end{aligned}$$

Ved division får vi

$$\tan(\pi - x) = \frac{\sin x}{-\cos x} = -\tan x.$$

For supplementvinklen  $\pi - x$  til  $x$  har vi sammenfattende:

$$\begin{aligned}\cos(\pi - x) &= -\cos x, & \tan(\pi - x) &= -\tan x, \\ \sin(\pi - x) &= \sin x, & \cot(\pi - x) &= -\cot x.\end{aligned}$$

## 5 Formler for cos, sin og tan til den dobbelte vinkel

Ved at sætte  $y := x$  i additionsformlerne (2) og (3) får vi

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, \\ \sin 2x &= 2\sin x \cos x.\end{aligned}$$

Ved division og efterfølgende forkortning med  $\cos^2 x$ , får vi

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Udtrykket for  $\cos 2x$  kan omskrives ved benyttelse af grundrelationen mellem cos og sin, så der fremkommer yderligere to formler:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

## 6 Formler for cos og sin udtrykt ved den dobbelte vinkel

$$\cos 2x = \begin{cases} 2 \cos^2 x - 1 & \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} & \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}, \\ 1 - 2 \sin^2 x & \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} & \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}. \end{cases}$$

## 7 Formler for tan udtrykt ved cos og sin til den dobbelte vinkel

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \begin{cases} \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}, \\ \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}. \end{cases}$$

Formlerne skrives ofte med  $x := \frac{x}{2}$  som

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

## 8 Formler for cos og sin udtrykt ved tan til den halve vinkel

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}},$$

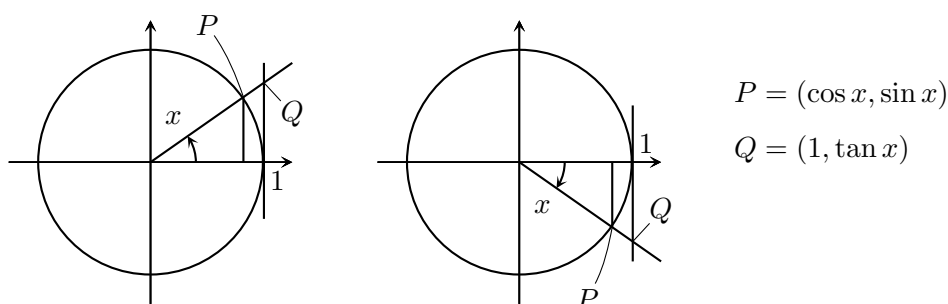
$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}.$$

## 9 Formler for $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

Jf.  $\int \frac{1}{\cos x} dx$ , se kompendium i calculus side 9:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan \frac{x}{2} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{x}{2} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{1 - \tan \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2}{(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2})} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{\cos x(1 - \sin x)} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 - \sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 - \sin x)} \\ &= \frac{\cos x}{1 - \sin x}. \end{aligned}$$

**10 En ulighed:**  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ ,  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$



Bemærk, at i intervallet  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$  gælder <sup>2</sup>

$$|\sin x| < |x| < |\tan x|.$$

Heraf fås

$$|\sin x| < |x| \Leftrightarrow \left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$$

og

$$|x| < |\tan x| \Leftrightarrow |\cos x| < \left| \frac{\sin x}{x} \right| \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}.$$

Samlet gælder, at

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Det ses, at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

da  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ .

10.7.2011/BR

---

<sup>2</sup> Vinkler målt i radian er identiske med de tilsvarende buelængder på enhedscirklen.