Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

15. januar 2020 kl. 9:00-13:00

Dette eksamenssæt består af 14 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt. Eksamen afholdes som digital stedprøve.

Tilladte hjælpemidler: Bøger, noter, fotokopier og print.

Ikke tilladt: Elektroniske hjælpemidler såsom lommeregner eller matematiprogrammer på computeren. Elektroniske dokumenter.

Der henvises i øvrigt til de generelle retningslinjer for afholdelse af eksamen.

Der gives fuld point hvis alle korrekte og ingen forkerte svar er afkrydset.

Facit

Til eksamenen udvalgte Moodle tilfældigt én af opgaverne 1A og 1B til hver studerende.

Opgave 1A (6 point)

Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(a) Markér de(t) rigtige udsagn:

- ☐ Ligningssystemet har ingen løsninger
- ☑ $x_1 = x_2 = 1$ og $x_3 = -1$ er en løsning til ligningssystemet
- ☑ $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ og $x_3 = 3$ er en løsning til ligningssystemet
- ☐ Ligningssystemet har netop to løsninger
- ☑ Ligningssystemet har uendeligt mange løsninger
- ☐ Ligningssystemet har netop én løsning

Opgave 1B (6 point)

Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(a) Markér de(t) rigtige udsagn:

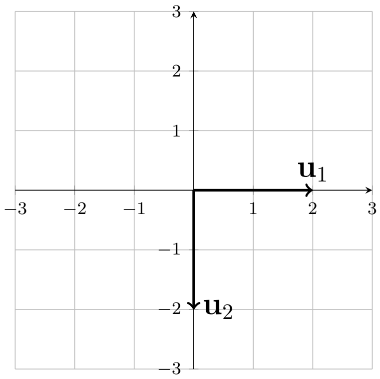
- ☐ Ligningssystemet har ingen løsninger
- ☐ $x_1 = x_2 = 1$ og $x_3 = -1$ er en løsning til ligningssystemet
- ☐ $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ og $x_3 = 3$ er en løsning til ligningssystemet
- ☐ Ligningssystemet har netop to løsninger
- ☐ Ligningssystemet har uendeligt mange løsninger
- ☑ Ligningssystemet har netop én løsning

Opgave 2 (5 point)

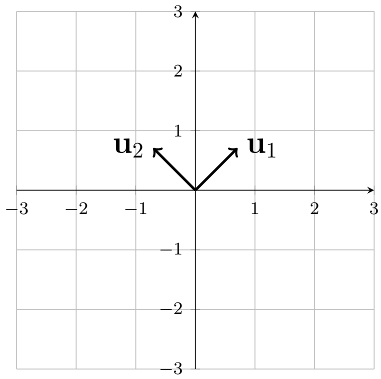
Figurerne herunder viser to vektorer $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ i $\mathbb{R}^2$.

(a) Markér den figur, hvor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ kan være resultatet af at anvende Gram-Schmidt (med normering) på en basis for $\mathbb{R}^2$.

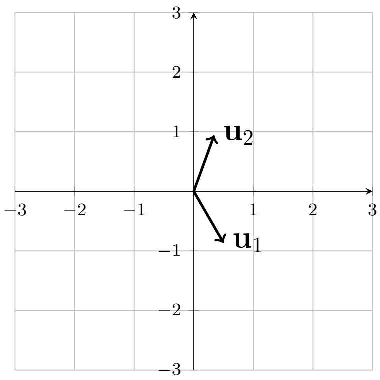
☐



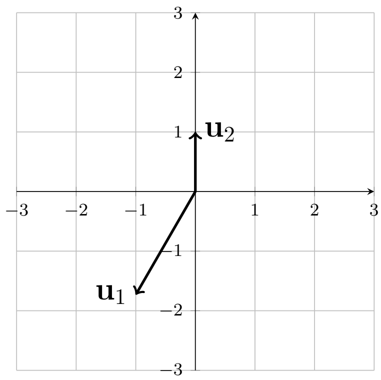
☑



☐



☐



Opgave 3 (10 point)

Det karakteristiske polynomium af matricen

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 5 \\ -6 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

er $-(t-12)(t-6)(t+3)$.

(a) (2 point). Hvilke(t) af følgende tal er egenværdi for A?

☐ -9 ☐ -6 ☑ -3 ☐ 0 ☐ 3 ☑ 6

(b) (2 point). Hvilke(n) af følgende er egenvektor for A?

☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) (1 point). Er A invertibel?

☑ Ja ☐ Nej ☐ Hverken ja eller nej

(d) (1 point). Er A diagonaliserbar?

☑ Ja ☐ Nej ☐ Hverken ja eller nej

(e) (2 point). Hvor mange, ikke nødvendigvis lineært uafhængige, egenvektorer har A?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☑ Uendeligt mange

(f) (2 point). Hvis $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, så er EA:

☐ $\begin{bmatrix} 7 & -5 & 5 \\ -10 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 7 & -5 & 5 \\ -6 & 0 & 6 \\ -2 & -2 & 14 \end{bmatrix}$

☑ $\begin{bmatrix} 7 & -5 & 5 \\ -6 & 0 & 6 \\ 10 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 11 & -7 & 13 \\ -6 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

Opgave 4 (12 point)

Lad $T \colon \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ være en lineær transformation med standardmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (1 point). Hvad er n?

☐ 2 ☑ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

(b) (1 point). Hvad er m?

☐ 2 ☐ 3 ☑ 4 ☐ 5 ☐ 6

(c) (2 point). Hvad er rangen $\text{Rank}(A)$?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☑ 3 ☐ 4

(d) (2 point). Hvad er nulliteten $\text{Nullity}(A)$?

☑ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

(e) (2 point). Er T injektiv (én-til-én) og/eller surjektiv (på)?

☑ Injektiv, men ikke surjektiv
☐ Injektiv og surjektiv
☐ Surjektiv, men ikke injektiv
☐ Ingen af delene

(f) (2 point). Vektoren $a = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ligger i:

☐ Søjlerummet $\text{Col}(A)$

☐ Nulrummet $\text{Null}(A)$

☑ Ingen af de ovenstående

(g) (2 point). Vektoren $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ligger i:

☑ Søjlerummet $\text{Col}(A)$

☐ Nulrummet $\text{Null}(A)$

☐ Ingen af de ovenstående

Opgave 5 (4 point)

A er en $n \times 3$-matrix, B er en $m \times 5$-matrix og $C = AB$ er en $p \times p$-matrix.

(a) Hvilke værdier har m, n og p?

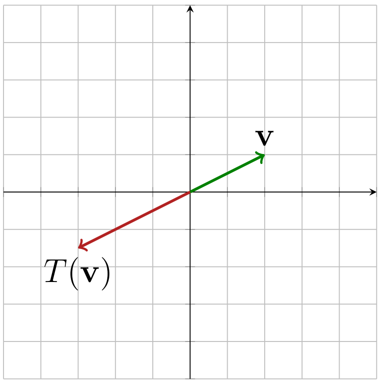
- [ ] $m = n = p = 3$
- [ ] $m = n = 5$, $p = 3$
- [ ] $m = 3$, $n = 5$, $p = 4$
- [ ] $m = n = p = 5$
- [ ] $m = 5$, $n = 3$, $p = 4$
- [x] Ingen af de foregående

Opgave 6 (5 point)

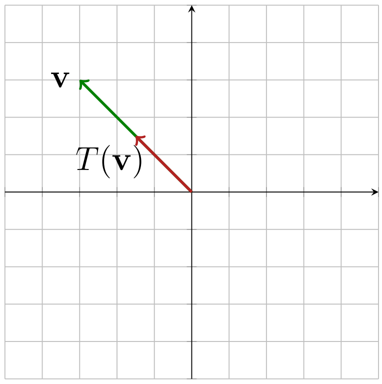
Figurerne herunder viser hver en vektor $\mathbf{v}$ og dens billede under en lineær afbildning T. Bemærk, at afbildningen T *ikke* den samme på alle figurer.

(a) Markér de figurer, hvor $\mathbf{v}$ er en egenvektor for T.

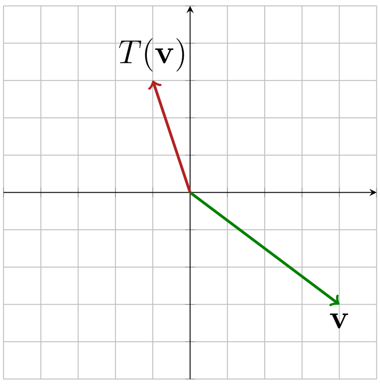
- [x]



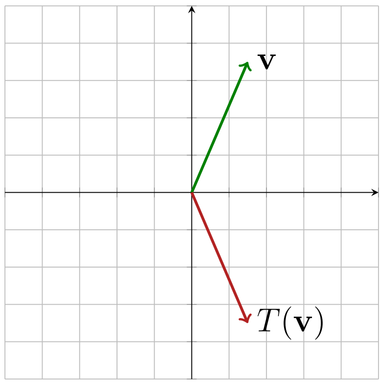
- [x]



- [ ]



- [ ]



Opgave 7 (10 point)

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(a) (5 point). Hvad er $A\mathbf{v}$?

☐ $\begin{bmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -16 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} -16 \\ -18 \\ 5 \end{bmatrix}$ ☐ Ingen af de nævnte

(b) (5 point). Hvad er den inverse til A?

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Opgave 8 (6 point)

Lad $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ og $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(a) (3 point). Er $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ ortogonale?

☑ Ja ☐ Nej ☐ Hverken ja eller nej

(b) (3 point). Hvad er ortogonalprojektionen af $\mathbf{u}$ på W?

☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$

Opgave 9 (2 point)

Lad $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Markér nedenfor de vektorer, som ligger i Span$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

☑ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Opgave 10 (10 point)

To matricer er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ved matrixmultiplikation fås matricen $C = AB$.

(a) (3 point). Hvad er størrelsen af matrix C?

☐ 2×3 ☐ 3×3 ☐ 2×4

☑ 3×2 ☐ 4×3 ☐ 4×2

(b) (3 point). Hvad er indgangen c_{31}?

☐ -3 ☐ 0 ☐ 4

☐ -1 ☑ 1 ☐ 3

(c) (4 point). Hvilke(n) af følgende produkter eksisterer?

☑ AB ☑ A^TB ☑ B^TA ☐ A^TB^T

☐ BA ☐ BA^T ☐ AB^T ☑ B^TA^T

Opgave 11 (10 point)

Lad A og B være 3×3-matricer med determinanter $\det(A) = 2$ og $\det(B) = 0$, hhv.

(a) (2 point). Hvad er $\det(-A)$?

☐ 2 ☑ -2 ☐ -4 ☐ 4 ☐ 0 ☐ Ikke defineret

(b) (2 point). Hvad er $\det(AB^{-1})$?

☐ 2 ☐ -2 ☐ -4 ☐ 4 ☐ 0 ☑ Ikke defineret

(c) (2 point). Hvad er $\det(-B^2)$?

☐ 2 ☐ -2 ☐ -4 ☐ 4 ☑ 0 ☐ Ikke defineret

(d) (2 point). Hvad er $\det(B^T)$?

☐ 2 ☐ -2 ☐ -4 ☐ 4 ☑ 0 ☐ Ikke defineret

(e) (2 point). Hvad er $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$?

☐ 2 ☐ -2 ☐ -4 ☑ 4 ☐ 0 ☐ Ikke defineret

Opgave 12 (4 point)

Et ligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + cx_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= -2, \end{aligned}$$

hvor c er en reel konstant. Markér de(t) rigtige udsagn herunder.

☐ $x_1 = -8$, $x_2 = 6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ er en løsning uanset hvad c er.

☑ Ligningssystemet er konsistent og har to frie variable uanset hvad c er.

☐ Ligningssystemet er inkonsistent uanset hvad c er.

☐ Om systemet er konsistent eller ej afhænger af værdien af c.

☐ Hvis $c = 3$, så har systemet netop én løsning, nemlig $x_1 = -8$, $x_2 = 6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Opgave 13 (10 point)

Matricen A er rækkereduceret til matricen R, hvor

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4\ \mathbf{a}_5\ \mathbf{a}_6]$ hvor $\mathbf{a}_i$ er i'te søjle i A.

(a) (2 point). Hvillket at følgende udsagn er korrekt?

- ☐ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ er lineært uafhængig.
- ☐ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_6\}$ er lineært afhængig.
- ☑ $\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_4$
- ☐ $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_4$
- ☐ $\mathbf{a}_6$ er en linearkombination af $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$

(b) (2 point). Hvad er nulliteten Nullity(A)?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☑ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6
- ☐ Det kan man ikke afgøre med de givne oplysninger.

(c) (2 point). Hvad er rangen Rank(A)?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☑ 4
- ☐ 5
- ☐ 6
- ☐ Det kan man ikke afgøre med de givne oplysninger.

(d) (2 point). Hvis A er totalmatricen/den udvidede koefficientmatrix for et system af lineære ligninger i $x_1, x_2, \ldots, x_5$, har ligningssystemet så en løsning?

- ☐ Ja
- ☑ Nej

(e) (2 point). Hvilke søjler i A er pivotsøjler?

- ☐ 2 og 5
- ☐ 5 og 6
- ☐ 2, 3, 4 og 5
- ☑ 1, 3, 4 og 6
- ☐ Ingen
- ☐ Alle

Opgave 14 (6 point)

I MATLABs Command Window indtastes følgende:

```
>> u = [1; 0; 1; 0];
>> v = [1; 2; 2; 1];
>> w = [1; 2; 3; 4];
>> z = [1; 3; 2; 6];
>> T = [u v w z];
>> rref(T)
 ans =
         1    0    0    0
         0    1    0    0
         0    0    1    0
         0    0    0    1
```

Hvis T er totalmatricen for et lineært ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvilket af følgende udsagn er så korrekt?

- [ ] Ligningssystemet har en entydig løsning: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- [x] Ligningssystemet har ingen løsninger.
- [ ] Enten har ligningssystemet ikke nogen løsninger, eller også har det uendeligt mange; det kommer an på hvad $\mathbf{b}$ er.