Eksamen i Diskret Matematik

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

Torsdag den 15. august, 2013. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: _____

STUDIENUMMMER: _____

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8 %).

Lad $T = \{a, b\}$ og $S = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

1. Hvor mange elementer er der i potensmængden (the power set) $\mathcal{P}(T)$?
2. Hvor mange elementer er der i potensmængden (the power set) $\mathcal{P}(S)$?
3. Opskriv $\mathcal{P}(T)$
4. Opskriv $\mathcal{P}(S)$

Opgave 2 (8 %).

1. Find ved hjælp af Euklids algoritme største fælles divisor mellem 1050 og 480.
2. Find heltal s og t, så $\gcd(1050, 480) = s1050 + t480$.

Opgave 3 (8 %).

Vis vha. vidner (C, k), at $2X^2 + \sqrt{X}$ er $\mathcal{O}(X^2)$.

Opgave 4 (10 %).

Lad relationen R på mængden $\{a, b, c, d, e, f\}$ være givet ved

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, a), (d, e), (e, f), (f, d)\}.$$

1. Tegn en orienteret graf, som illustrerer R.
2. Find den symmetriske aflukning (afslutning/closure) af R.
3. Find den refleksive aflukning (afslutning/closure) af R.
4. Find den transitive aflukning (afslutning/closure) af R.
5. Udvid R, således at den resulterende relation er en ækvivalensrelation.

Opgave 5 (8 %).

Brug flettesorteringsalgoritmen (merge sort) til at sortere listen

$$9, 7, 10, 1, 3, 2, 4, 5$$

efter voksende størrelse. Husk, at tage mellemregninger med.

Opgave 6 (8 %).

Betragt følgende sætning:

Sætning: For ethvert heltal n gælder der, at hvis n^3 er ulige, da er n ulige.

1. Bevis ovenstående sætning vha. kontraposition.
2. Giv et modstridsbevis for ovenstående sætning.

Opgave 7 (6 %).

Hvad bliver resultatet (ifølge binomialsætningen), hvis alle paranteser ganges ud i udtrykket $(X+2)^7$?

Opgave 8 (12 %).

I denne opgave arbejdes der med del-og-hersk-algoritmen (divide-and-conquer), som vi benyttede i kurset til at finde produktet af to heltal. I bogen omtales den som "Fast Multiplication of Integers", men den kendes også under navnet "Karatsubas algoritme".

1. Eftervis, at den binære repræsentation af 2 er $(10)_2$ og at den binære repræsentation af 3 er $(11)_2$.
2. Udregn vha. Karatsubas algoritme produktet $2 \cdot 3$ (det er vigtigt, at du tager alle mellemregninger med).

Facitliste for Diskret Matematik
eksamen 15/8-13

Opg. 1

1) 4

2) 4

3) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

4) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Opg. 2

1) 30

2) $\gcd(1050, 480) = (-5)\cdot 1050 + 11 \cdot 480$

Opg. 3

Mange svar

Eksempelvis: $(C, k) = (3, 1)$

Opg. 4

1)

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] & b \arrow[dr] & \\
 & & c \arrow[ull] \\
f \arrow[dr] & & \\
 & d \arrow[dl] & \\
e \arrow[uu] & &
\end{tikzcd}$$

2) $\{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,a), (a,c), (d,e), (e,d), (e,f), (f,e), (f,d), (d,f)\}$

3) $R \cup \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f)\}$

4) $R \cup \{(b,a), (a,c), (c,b), (a,a), (b,b), (c,c), (d,f), (f,e), (e,d), (d,d), (f,f), (e,e)\}$.

1/ 5) Svar eksempelvis som i (4)

opg. 5

$m(ms(9,7,10,1), ms(3,2,4,5))$

$= m(m(ms(9,7), ms(10,1)), m(ms(3,2), ms(4,5)))$

$= m(m(m(ms(9), ms(7)), m(ms(10), ms(1))), m(m(ms(3), ms(2)),$
$m(ms(4), ms(5))))$

$m(m(m((9),(7)), m((10),(1))), m(m((3),(2)),$
$m((4),(5))))$

$= m(m((7,9),(1,10)), m((2,3),(4,5)))$

$= m((1,7,9,10),(2,3,4,5))$

$= (1,2,3,4,5,7,9,10)$

opg. 6

1) Bevis via kontraposition: Vi skal vise, at hvis n er lige, da er n^3 lige.
Antag, at n er lige. Men så $n = 2 \cdot k$ for et heltal k. Men så $n^3 = 8 \cdot k^3 = 2(4 \cdot k^3)$.
altså er n^3 lige $\square$

2) Modsigelsesbevis:
Antag at n^3 er ulige, men at n er lige. Men så holder $n^3 = 2 \cdot k$ ikke for noget heltal k. Men da n er lige, haves $n = 2s$ for et eller andet s. Men så
$n^3 = 8s^3 = 2 \cdot (4s^3)$ hvor $4s^3$ er et heltal.
Modsigelse er nået. $\square$

Opg. 7

$$x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^4 + 560x^3 + 672x^2 + 448x + 128$$

Opg. 8

1) $(10)_2 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2$

$(11)_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3$

2)

$$(10)_2 \cdot (11)_2 = (2^2 + 2^1)(1)_2(1)_2 + 2^1((1)_2 - (0)_2)((1)_2 - (1)_2) + (2^1 + 1)(0)_2 \cdot (1)_2$$

$$= (2^2 + 2^1)(1)_2 + 2^1((1)_2 \cdot (0)_2) + (2^1 + 1)(0)_2$$

$$= (100)_2 + (10)_2 + 2^1(0)_2$$

$$= (100)_2 + (10)_2 = (110)_2 = 6$$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (10 %).

Besvar følgende syv JA/NEJ spørgsmål:

a. Gælder der $\sum_{i=1}^{7} 1 = 7$?

1

☒ JA ☐ NEJ

b. Gælder der $\sum_{k=0}^{7} k = 8$?

1

☐ JA ☒ NEJ

c. Gælder der $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$?

2

☒ JA ☐ NEJ

d. Gælder der $\sum_{s=1}^{n} 1 = n+1$?

1

☐ JA ☒ NEJ

e. Gælder der $\sum_{i=1}^{n} (i+2) = \frac{n(n+1)+4n}{2}$?

2

☒ JA ☐ NEJ

f. Gælder der $\sum_{i=2}^{4} (i^2+1) = 30$?

1

☐ JA ☒ NEJ

g. Gælder der, at mængden $\{\frac{a}{b} \mid a, b$ er positive heltal, $a > b\}$ er tællelig?

2

☒ JA ☐ NEJ

Opgave 10 (2 %).

Besvar følgende syv JA/NEJ spørgsmål:

1. Gælder der, at $\sin(X)$ er $\mathcal{O}(1)$?

   ☒ JA ☐ NEJ

Opgave 11 (8 %).

Betragt grafen $G = (V, E)$ med nabomatrix (adjacency matrix)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Besvar følgende to JA/NEJ spørgsmål:

a. Har grafen G en Hamiltonkreds (Hamilton circuit)?

   ☒ JA ☐ NEJ

b. Har grafen G en Eulerkreds (Euler circuit)?

   ☒ JA ☐ NEJ

Opgave 12 (12 %).

I det følgende er p og q udsagn. Besvar følgende to JA/NEJ spørgsmål:

a. Gælder der $(p \to q) \to p \equiv p$?

☒ JA ☐ NEJ

b. Er $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ en tautologi?

☒ JA ☐ NEJ

I det følgende er $P(x)$ en udsagnsfunktion med definitionsmængde (universe of discource) lig $\{1, 2, 3\}$. Besvar følgende to JA/NEJ spørgsmål:

c. Har udsagnet $(\forall x \neg P(x)) \wedge (\exists x P(x))$ sandhedsværdien falsk?

☒ JA ☐ NEJ

d. Gælder der $\forall x \neg P(x) \equiv \neg(P(1) \vee P(2) \vee P(3))$?

☒ JA ☐ NEJ