Reeksamen i Diskret Matematik

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

15. august 2017. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 11 nummererede sider med ialt 15 opgaver. Alle opgaver er "multiple choice" opgaver. **Besvarelsen skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Ved hver opgave er angivet hvordan opgaven vægtes ved bedømmelsen.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på besvarelsen.

NAVN: _____

STUDIENUMMMER: _____

Der er kun ét rigtigt svar til hvert spørgsmål.

Opgave 1 (8 %)

1. Hvor mange rækker er der i en sandhedstabel for det sammensatte udsagn

$$(p \vee r) \wedge (r \to q) \vee s$$

☐ 1 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 8 ☐ 12 ☐ 16

2. Er de sammensatte udsagn $\neg(p \wedge q)$ og $\neg p \vee q$ ækvivalente?

☐ Ja ☐ Nej

3. Er det sammensatte udsagn $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ en tautologi?

☐ Ja ☐ Nej

4. Er de sammensatte udsagn $\neg(p \to q)$ og $(p \wedge \neg q)$ ækvivalente?

☐ Ja ☐ Nej

Opgave 2 (4 %)

Hvilken slutningsregel (rule of inference) benyttes i følgende argument:

"Jeg tager til London eller Paris. Jeg tager ikke til London. Derfor, skal jeg til Paris."

☐ Konjunktion
☐ Modus tollens
☐ Modus ponens
☐ Kædeslutningsregel (hypothetical syllogism)
☐ Disjunktiv syllogisme (disjunctive syllogism)

Opgave 3 (10 %)

Lad $A = \{1, 2, 5, \{6\}\}$, og $B = \{\emptyset, 1, \{2\}, 6, 7\}$, være mængder.

1. Er $\{2\} \subseteq B$?

   ☐ Ja ☐ Nej

2. Hvad er kardinaliteten af $A \cap B$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

3. Hvad er kardinaliteten af $A \cup B$?

   ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

4. Hvad er kardinaliteten af potensmængden $\mathcal{P}(A)$?

   ☐ 0 ☐ 2 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 12 ☐ 16 ☐ 22 ☐ 32

5. Hvad er kardinaliteten af $A \times B$?

   ☐ 0 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 8 ☐ 10 ☐ 20 ☐ 200 ☐ 2^9

Opgave 4 (9 %)

Lad

$$f(x) = x^3 \log(x^2) + \log(x^{10} + 1) + x^3,$$

for $x > 0$.

Besvar følgende sand/falsk opgaver.

1. $f(x)$ er $O(x^{10})$ ☐ Sand ☐ Falsk
2. $f(x)$ er $O(x^3 \log x)$ ☐ Sand ☐ Falsk
3. $f(x)$ er $O(x^3)$ ☐ Sand ☐ Falsk
4. $f(x)$ er $\Omega(x^{10})$ ☐ Sand ☐ Falsk
5. $f(x)$ er $\Omega(x^3 \log x)$ ☐ Sand ☐ Falsk
6. $f(x)$ er $\Omega(x^3)$ ☐ Sand ☐ Falsk
7. $f(x)$ er $\Theta(x^{10})$ ☐ Sand ☐ Falsk
8. $f(x)$ er $\Theta(x^3 \log x)$ ☐ Sand ☐ Falsk
9. $f(x)$ er $\Theta(x^3)$ ☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 5 (4 %)

$(5 + 55 + 101)(576 \cdot 555 + 10000000002)$ **mod** 5 er lig med

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Opgave 6 (7 %)

Hvad er den inverse til 7 modulo 53?

☐ 14 ☐ 15 ☐ 16 ☐ 17 ☐ 37 ☐ 38 ☐ 39 ☐ 43 ☐ 45

Opgave 7 (5 %)

Betragt følgende algoritme:

```
procedure Alg(n: positive integer)
a := 1
b := 1
for i := 1 to n
    for j := 1 to 1000000
        for k := 1 to n
            a := a · b
    b := 3 · b
return a
```

Antallet af multiplikationer, der bruges af denne algoritme, er

☐ $O(n)$ ☐ $\Theta(n^2 \log n)$ ☐ $O(n^2)$ ☐ $\Theta(n^3)$ ☐ $O(n \log n)$

Opgave 8 (6 %)

Lad $(2x - y)^5 = ax^5 + bx^4y + cx^3y^2 + dx^2y^3 + exy^4 + fy^5$, hvor a, b, c, d, e, f er heltal.

1. Der gælder at a er lig

   ☐ -1 ☐ 1 ☐ 8 ☐ 5 ☐ 16 ☐ 32 ☐ 100

2. Der gælder at c er lig

   ☐ -80 ☐ -40 ☐ -20 ☐ -10 ☐ 10 ☐ 20 ☐ 40 ☐ 80

3. Der gælder at d er lig

   ☐ -80 ☐ -40 ☐ -20 ☐ -10 ☐ 10 ☐ 20 ☐ 40 ☐ 80

Opgave 9 (4 %)

Betragt følgende mængde af heltal

$$S = \{x \mid -63 \leq x \leq 126 \ \wedge \ x \equiv 5 \ (\textbf{mod}\ 7) \ \wedge \ x \equiv 5 \ (\textbf{mod}\ 9)\}$$

Hvor mange heltal er der i S?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 63 ☐ 126 ☐ 189

Opgave 10 (6 %)

Betragt følgende lineære homogene rekursionsrelation

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}.$$

Hvilken af følgende er løsningen til denne rekursionsrelation (α_1 og α_2 er konstanter)?

☐ $a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2(-3)^n$
☐ $a_n = \alpha_1 + \alpha_2 3^n$
☐ $a_n = \alpha_1 + \alpha_2 2^n$
☐ $a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 3^n$
☐ $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-3)^n$

Opgave 11 (6 %)

En mængde S af heltal er defineret rekursivt ved

- $0 \in S$, $5 \in S$ og $6 \in S$
- hvis $a \in S$ og $b \in S$ så er $a + b$ også i S.

Besvar følgende spørgsmål om S

1. Hvad det største heltal, der ikke ligger i S?

   ☐ 9 ☐ 13 ☐ 14 ☐ 18 ☐ 19 ☐ 20 ☐ 21 ☐ 22 ☐ 23

2. S består af alle tal på formen $5r + 6t$ hvor r og t er hele tal der opfylder ... Angiv den korrekte fortsættelse.

   ☐ $r > 0 \ \wedge \ s > 0$
   ☐ $r \geq 0 \ \wedge \ s \geq 0$
   ☐ $r \geq 0 \ \wedge \ s \geq 0 \ \wedge \ r + t > 0$
   ☐ $r \geq 1 \ \vee \ s \geq 0$
   ☐ $r > 6 \ \vee \ s \geq 5$

Opgave 12 (10 %)

Lad $A = \{1, 2, 3, 4\}$ være en mængde. Betragt følgende tre relationer på A

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,4), (3,2)\}$$

$$S = \{(1,4), (1,3), (2,3), (3,1), (4,1)\}$$

$$T = \{(1,2), (2,3), (3,4), (2,1)\}$$

1. Besvar følgende sand/falsk opgaver:

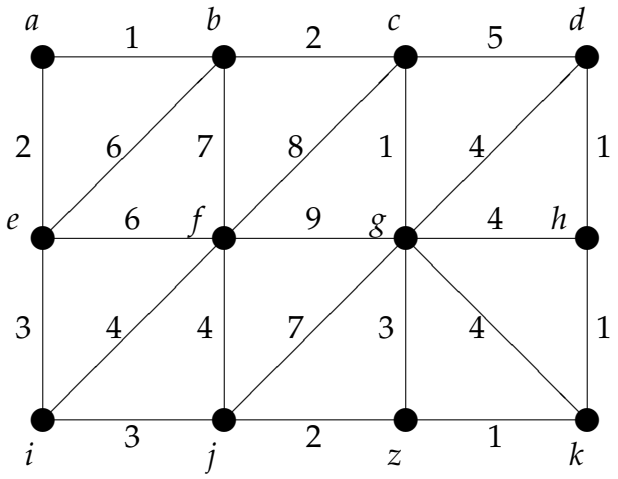
R er refleksiv	☐ Sand	☐ Falsk
R er symmetrisk	☐ Sand	☐ Falsk
R er antisymmetrisk	☐ Sand	☐ Falsk
R er transitiv	☐ Sand	☐ Falsk
$(2,1) \in S \circ R$	☐ Sand	☐ Falsk
$(2,1) \in R \circ S$	☐ Sand	☐ Falsk

2. Hvor mange par (a, b) er der i den symmetriske afslutning (symmetric closure) af S?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10

3. Hvor mange par (a, b) er der i den transitive afslutning (transitive closure) af T?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10



Figur 1: Grafen G, der betragtes i opgaverne 13 og 14.

Opgave 13 (10 %)

I denne opgave bruger vi Dijkstras algoritme (se Figur 2 på Side 11) på grafen i Figur 1.

1. Hvad er længden af en korteste vej fra a til z (som bestemmes af Dijkstras algoritme)?

   ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ 13

2. I hvilken rækkefølge tilføjes punkter til mængden S?

   ☐ a, b, c, g, z
   ☐ a, b, e, c, g, i, j, z
   ☐ a, b, e, c, g, i, z
   ☐ a, b, c, g, i, z
   ☐ a, b, e, c, g, z
   ☐ a, b, c, e, i, g, z
   ☐ $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, z$

Opgave 14 (5 %)

Hvad er vægten af et minimum udspændende træ af grafen G i Figur 1?

☐ 19 ☐ 20 ☐ 21 ☐ 22 ☐ 23 ☐ 24 ☐ 25 ☐ 26 ☐ 27

Opgave 15 (6 %)

Lad T være et fuldt binært træ med 6 blade.

1. Hvor mange punkter (vertices) har T i alt?

   ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12

2. Hvad er den mindst mulige højde af T?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

3. Hvad er den størst mulige højde af T?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

procedure *Dijkstra*(G: weighted connected simple graph, with
    all weights positive)
{G has vertices $a = v_0, v_1, \ldots, v_n = z$ and lengths $w(v_i, v_j)$
    where $w(v_i, v_j) = \infty$ if $\{v_i, v_j\}$ is not an edge in G}
for $i := 1$ **to** n
    $L(v_i) := \infty$
$L(a) := 0$
$S := \emptyset$
{the labels are now initialized so that the label of a is 0 and all
    other labels are ∞, and S is the empty set}
while $z \notin S$
    $u :=$ a vertex not in S with $L(u)$ minimal
    $S := S \cup \{u\}$
    for all vertices v not in S
        if $L(u) + w(u, v) < L(v)$ **then** $L(v) := L(u) + w(u, v)$
        {this adds a vertex to S with minimal label and updates the
        labels of vertices not in S}
return $L(z)$ {$L(z) =$ length of a shortest path from a to z}

Figur 2: