

Prøveeksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Marts 2016

Dette eksamenssæt består af 9 nummererede sider med 14 afkrydningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger. Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

Held og lykke!

NAVN: _____

STUDIENUMMER: _____

Opgave 1 (8 point)

En plan kurve er givet ved

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2t^2, \\y &= 1 + t^3,\end{aligned}$$

hvor parameteren t gennemløber de positive reelle tal. Markér de korrekte svar herunder.

(a) (1 point). Hvilket punkt på kurven svarer til parameterværdien $t = 1$?

- (1, 1) (3, 2) (9, 10) (0, 0) $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

(b) (7 point). Hvad er krumningen af kurven for $t = 1$?

- $\frac{12}{125}$ $\frac{24}{5}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2 $\frac{12}{5}$

Opgave 2 (6 point)

En kurve i rummet er givet ved

$$\begin{aligned}x &= \cos(2t), \\y &= \sin(2t), \\z &= t^2 + 3,\end{aligned}$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal. Makér det korrekte udtryk for buelængden af kurven fra $t = 0$ til $t = 3$.

- $\int_0^3 \sqrt{1 + 4t^2} dt$ $\int_0^3 \sqrt{1 + (t^2 + 3)^2} dt$
 $\int_0^3 2\sqrt{1 + t^2} dt$ $\int_0^3 (4 + t^2) dt$
 $\int_0^3 (2 + 2t) dt$ $\int_0^3 (-\sin(2t) + \cos(2t) + 2t) dt$

Opgave 3 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x) = \ln(1 + x^2).$$

Hvilket af nedenstående polynomier er 2. ordens Taylor polynomiet for $f(x)$ med udviklingspunkt $a = 0$?

$1 + x + \frac{1}{2}x^2$

$x + \frac{1}{6}x^2$

$x + x^2$

x^2

$x - \frac{1}{2}x^2$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

Opgave 4 (7 point)

Betragt differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2y, \quad y > 0.$$

Der er en entydig løsning $y(x)$ med begyndelsesværdi $y(0) = 3$. Besvar følgende spørgsmål angående denne løsning:

(a) (3 point). Hvad er funktionsværdien $y(1)$?

$6e^3$

12

$3e^2$

6

$18e$

(b) (3 point). Hvad giver differentialkvotienten $y'(1)$?

$18e^2$

$36e^3$

36

2

$12 \ln(6)$

(c) (1 point). Hvad giver differentialkvotienten $y'(0)$?

0

6

12

24

3

Opgave 5 (8 point)

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x, \quad y(0) = 1.$$

Besvar følgende spørgsmål angående den entydige løsning $y(x)$.

(a) (4 point). Hvad er funktionsværdien $y(1)$?

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-1}$ e^{-1} 3 $1 + e^{-1}$ $1 + e$

(b) (4 point). Hvad giver differentialkvotienten $y'(1)$?

- $-1 - 2e$ e^{-1} $-1 - 2e^{-1}$ $-e^{-1}$ -5

Opgave 6 (7 point)

Betragt differentialligningen

$$y'' + 6y' + 10y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk, hvori der indgår to arbitrære konstanter c_1 og c_2 . Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

- $y(t) = c_1e^t + c_2e^{3t}$
- $y(t) = c_1e^{2t} \cos(3t) + c_2e^{2t} \sin(3t)$
- $y(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t}$
- $y(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-4t}$
- $y(t) = c_1e^{-t} \cos(t) + c_2e^{-t} \sin(t)$
- $y(t) = c_1e^{-2t} \cos(3t) + c_2e^{-2t} \sin(3t)$
- $y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t}$
- $y(t) = c_1e^{-5t} + c_2te^{-5t}$
- $y(t) = c_1e^t \cos(2t) + c_2e^t \sin(2t)$
- $y(t) = c_1e^{-3t} \cos(t) + c_2e^{-3t} \sin(t)$
- $y(t) = c_1e^{6t} + c_2e^{10t}$

Opgave 7 (6 point)

Betragt den inhomogene differentiaalligning

$$y'' + 4y' + 6y = 3t - 4.$$

(a) (3 point). Hvilken af følgende funktioner $y_p(t)$ kan, for passende valg af konstanterne A og B , blive en partikulær løsning til differentiaalligningen?

$y_p(t) = Ae^{4t} + Be^{6t}$

$y_p(t) = At + B$

$y_p(t) = A \sin(4t) + B \cos(6t)$

$y_p(t) = Ae^{3t} + Be^{-4t}$

(b) (3 point). Hvad skal konstanterne A og B være, for at man får en partikulær løsning?

$A = 1, \quad B = 3$

$A = \frac{1}{5}, \quad B = -4$

$A = -1, \quad B = 5$

$A = \frac{1}{2}, \quad B = -1$

Opgave 8 (8 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = e^{4y+2xy}.$$

(a) (3 point). Hvad giver den partielle afledede $f_x(x, y)$?

e^{2y}

e^{4y+2xy}

$2e^{2y}$

$(4y + 2xy)e^{4y+2xy-1}$

$6e^{4y+2xy}$

$2ye^{4y+2xy}$

(b) (3 point). Hvad giver den partielle afledede $f_y(x, y)$?

$(4 + 2x)e^{4y+2xy}$

$4e^{4y+2xy}$

e^{4+2x}

$(4y + 2xy)e^{4y+2xy-1}$

e^{4y+2xy}

$2e^{4y+2xy}$

(c) (2 point). Hvilket af følgende punkter er et kritisk punkt for funktionen f ?

$(0, 0)$

$(3, 0)$

$(1, -2)$

$(-1, 3)$

$(2, 1)$

$(-2, 0)$

Opgave 9 (8 point)

En funktion er defineret som

$$f(x, y) = x \sin(y) + x^2.$$

(a) (3 point). Hvad giver gradientvektoren $\nabla f(P)$ i punktet $P = (1, 0)$?

$\mathbf{i} - \mathbf{j}$ $2\mathbf{i}$ $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ $-\mathbf{j}$ $\mathbf{0}$

(b) (2 point). Hvad giver den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (1, 0)$ og retningen bestemt ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$?

$\frac{8}{5}$ $\frac{1}{5}$ 7 $\frac{11}{5}$ $-\frac{3}{5}$

(c) (3 point). Hvilken af nedenstående ligninger beskriver tangentplanen til grafen for f i punktet $Q = (1, 0, 1)$?

$3x - y - z = 2$ $x - y + 2z = 3$
 $x - y - z = 0$ $x + y - z = \pi$
 $z = 1$ $2x + y - z = 1$

Opgave 10 (10 point)

Et område \mathcal{R} i planen er beskrevet ved de punkter (x, y) , som opfylder ulighederne

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq x, \quad 0 \leq y.$$

Markér værdien af planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2 - 1) dA.$$

$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{11}{7}$ $\frac{9\pi}{8}$ $\frac{7\pi}{5}$ $\frac{15}{11}$
 15 $\frac{\pi^2}{4}$ 10π 9 21

Opgave 11 (5 point)

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = \frac{2+i}{3-i} + \frac{3+i}{2}, \quad z_2 = (e^{1+\frac{\pi}{3}i})^6.$$

(a) (3 point). Hvad giver z_1 skrevet på standard form?

$2+i$ $3-2i$ $-i$ $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ 0

(b) (2 point). Hvad giver z_2 skrevet på standard form?

1 $-e^6$ e^3 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e^6

Bemærkning. I opgave 12 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 12 (6 point)

Lad \mathcal{T} være området i rummet bestående af de punkter (x, y, z) , som opfylder ulighederne

$$-2 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4 - x^2, \quad -y \leq z \leq y.$$

Et legeme med massetætheden (densiteten) $\delta(x, y, z) = 3 - y$ dækker netop området \mathcal{T} . Legemets rumfang (volumen) betegnes V , og legemets masse betegnes m . Markér samtlige korrekte udtryk nedenfor. Bemærk: Du skal **ikke** beregne integralerne.

$m = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} \int_{-y}^y (3-y) dz dy dx.$

$m = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} \int_{-y}^y (3-y) dz dx dy.$

$m = \int_0^{4-x^2} \int_{-2}^2 \int_{-y}^y (3-y) dz dx dy.$

$V = \int_0^{4-x^2} \int_{-2}^2 \int_{-y}^y dz dx dy.$

$V = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} \int_{-y}^y dz dy dx.$

Opgave 13 (10 point).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

(a) (2 point). Der gælder, at

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{5\pi}{4}.$$

Sand

Falsk

(b) (2 point). Lad D være området i planen bestående af de punkter (x, y) , som opfylder ulighederne $0 \leq x \leq 1$ og $0 < y \leq 1$. Lad f være funktionen med forskrift

$$f(x, y) = x^2y + \frac{1}{y}$$

og definitionsmængde D . Da antager f globalt maksimum på D .

Sand

Falsk

(c) (2 point). Definitionsmængden for funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ er \mathbf{R}^2 svarende til hele xy -planen.

Sand

Falsk

(d) (2 point). For funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, eksisterer den partielle afledede $f_x(x, y)$ ikke i punktet $(x, y) = (0, 0)$.

Sand

Falsk

(e) (2 point). Punktet med rektangulære koordinater $(x, y) = (1, 1)$ kan i polære koordinater angives ved $(r, \theta) = (-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$.

Sand

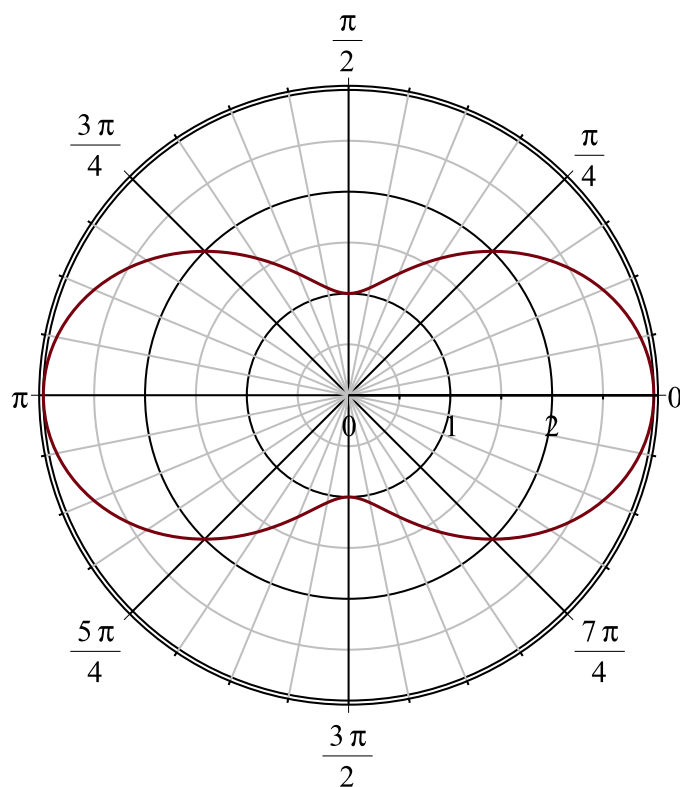
Falsk

Opgave 14 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f svarer til figuren?

$f(\theta) = 2 - \cos(3\theta)$

$f(\theta) = 2 + \cos(2\theta)$

$f(\theta) = 2 + \cos(\theta)$

$f(\theta) = 2 + \sin(2\theta)$

$f(\theta) = 1 + \sin(3\theta)$

$f(\theta) = 1 + \sin(\theta)$