Facit

Prøveeksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet og Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Marts 2016

Dette eksamenssæt består af 9 nummererede sider med 14 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger. Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

Held og lykke!

NAVN: ______________________

STUDIENUMMMER: ______________________

Opgave 1 (8 point)

En plan kurve er givet ved

$$x = 1 + 2t^2,$$
$$y = 1 + t^3,$$

hvor parameteren t gennemløber de positive reelle tal. Markér de korrekte svar herunder.

(a) (1 point). Hvilket punkt på kurven svarer til parameterværdien $t = 1$?

☐ $(1,1)$ ☒ $(3,2)$ ☐ $(9,10)$ ☐ $(0,0)$ ☐ $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

(b) (7 point). Hvad er krumningen af kurven for $t = 1$?

☒ $\frac{12}{125}$ ☐ $\frac{24}{5}$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ 2 ☐ $\frac{12}{5}$

Opgave 2 (6 point)

En kurve i rummet er givet ved

$$x = \cos(2t),$$
$$y = \sin(2t),$$
$$z = t^2 + 3,$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal. Makér det korrekte udtryk for buelængden af kurven fra $t = 0$ til $t = 3$.

☐ $\int_0^3 \sqrt{1 + 4t^2}dt$ ☐ $\int_0^3 \sqrt{1 + (t^2 + 3)^2}dt$

☒ $\int_0^3 2\sqrt{1 + t^2}dt$ ☐ $\int_0^3 (4 + t^2)dt$

☐ $\int_0^3 (2 + 2t)dt$ ☐ $\int_0^3 (-\sin(2t) + \cos(2t) + 2t)dt$

Opgave 3 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x) = \ln(1 + x^2).$$

Hvilket af nedenstående polynomier er 2. ordens Taylor polynomiet for $f(x)$ med udviklingspunkt $a = 0$?

- ☐ $1 + x + \frac{1}{2}x^2$
- ☐ $x + \frac{1}{6}x^2$
- ☐ $x + x^2$
- ☒ x^2
- ☐ $x - \frac{1}{2}x^2$
- ☐ $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

Opgave 4 (7 point)

Betragt differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2y, \quad y > 0.$$

Der er en entydig løsning $y(x)$ med begyndelsesværdi $y(0) = 3$. Besvar følgende spørgsmål angående denne løsning:

(a) (3 point). Hvad er funktionsværdien $y(1)$?

☐ $6e^3$ ☐ 12 ☒ $3e^2$ ☐ 6 ☐ $18e$

(b) (3 point). Hvad giver differentialkvotienten $y'(1)$?

☒ $18e^2$ ☐ $36e^3$ ☐ 36 ☐ 2 ☐ $12\ln(6)$

(c) (1 point). Hvad giver differentialkvotienten $y'(0)$?

☒ 0 ☐ 6 ☐ 12 ☐ 24 ☐ 3

Opgave 5 (8 point)

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x, \quad y(0) = 1.$$

Besvar følgende spørgsmål angående den entydige løsning $y(x)$.

(a) (4 point). Hvad er funktionsværdien $y(1)$?

☒ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-1}$ ☐ e^{-1} ☐ 3 ☐ $1 + e^{-1}$ ☐ $1 + e$

(b) (4 point). Hvad giver differentialkvotienten $y'(1)$?

☐ $-1 - 2e$ ☐ e^{-1} ☐ $-1 - 2e^{-1}$ ☒ $-e^{-1}$ ☐ -5

Opgave 6 (7 point)

Betragt differentialligningen

$$y'' + 6y' + 10y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk, hvori der indgår to arbitrære konstanter c_1 og c_2. Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

☐ $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$

☐ $y(t) = c_1 e^{2t} \cos(3t) + c_2 e^{2t} \sin(3t)$

☐ $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$

☐ $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$

☐ $y(t) = c_1 e^{-t} \cos(t) + c_2 e^{-t} \sin(t)$

☐ $y(t) = c_1 e^{-2t} \cos(3t) + c_2 e^{-2t} \sin(3t)$

☐ $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$

☐ $y(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 t e^{-5t}$

☐ $y(t) = c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t)$

☒ $y(t) = c_1 e^{-3t} \cos(t) + c_2 e^{-3t} \sin(t)$

☐ $y(t) = c_1 e^{6t} + c_2 e^{10t}$

Opgave 7 (6 point)

Betragt den inhomogene differentialligning

$$y'' + 4y' + 6y = 3t - 4.$$

(a) (3 point). Hvilken af følgende funktioner $y_p(t)$ kan, for passende valg af konstanterne A og B, blive en partikulrær løsning til differentialligningen?

- ☐ $y_p(t) = Ae^{4t} + Be^{6t}$
- ☒ $y_p(t) = At + B$
- ☐ $y_p(t) = A\sin(4t) + B\cos(6t)$
- ☐ $y_p(t) = Ae^{3t} + Be^{-4t}$

(b) (3 point). Hvad skal konstanterne A og B være, for at man får en partikulær løsning?

- ☐ $A = 1, \quad B = 3$
- ☐ $A = \frac{1}{5}, \quad B = -4$
- ☐ $A = -1, \quad B = 5$
- ☒ $A = \frac{1}{2}, \quad B = -1$

Opgave 8 (8 point)

En funktion er givet ved

$$f(x,y) = e^{4y+2xy}.$$

(a) (3 point). Hvad giver den partielle afledede $f_x(x,y)$?

- ☐ e^{2y}
- ☐ e^{4y+2xy}
- ☐ $2e^{2y}$
- ☐ $(4y+2xy)e^{4y+2xy-1}$
- ☐ $6e^{4y+2xy}$
- ☒ $2ye^{4y+2xy}$

(b) (3 point). Hvad giver den partielle afledede $f_y(x,y)$?

- ☒ $(4+2x)e^{4y+2xy}$
- ☐ $4e^{4y+2xy}$
- ☐ e^{4+2x}
- ☐ $(4y+2xy)e^{4y+2xy-1}$
- ☐ e^{4y+2xy}
- ☐ $2e^{4y+2xy}$

(c) (2 point). Hvilket af følgende punkter er et kritisk punkt for funktionen f?

- ☐ $(0,0)$
- ☐ $(3,0)$
- ☐ $(1,-2)$
- ☐ $(-1,3)$
- ☐ $(2,1)$
- ☒ $(-2,0)$

Opgave 9 (8 point)

En funktion er defineret som

$$f(x,y) = x\sin(y) + x^2.$$

(a) (3 point). Hvad giver gradientvektoren $\nabla f(P)$ i punktet $P = (1,0)$?

☐ $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ☐ $2\mathbf{i}$ ☒ $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ☐ $-\mathbf{j}$ ☐ $\mathbf{0}$

(b) (2 point). Hvad giver den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (1,0)$ og retningen bestemt ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$?

☐ $\frac{8}{5}$ ☐ $\frac{1}{5}$ ☐ 7 ☒ $\frac{11}{5}$ ☐ $-\frac{3}{5}$

(c) (3 point). Hvilken af nedenstående ligninger bekriver tangentplanen til grafen for f i punktet $Q = (1,0,1)$?

☐ $3x - y - z = 2$ ☐ $x - y + 2z = 3$

☐ $x - y - z = 0$ ☐ $x + y - z = \pi$

☐ $z = 1$ ☒ $2x + y - z = 1$

Opgave 10 (10 point)

Et område $\mathcal{R}$ i planen er beskrevet ved de punkter (x,y), som opfylder ulighederne

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq x, \quad 0 \leq y.$$

Markér værdien af planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2 - 1)\, dA.$$

☐ $\frac{3\pi}{2}$ ☐ $\frac{11}{7}$ ☒ $\frac{9\pi}{8}$ ☐ $\frac{7\pi}{5}$ ☐ $\frac{15}{11}$

☐ 15 ☐ $\frac{\pi^2}{4}$ ☐ 10π ☐ 9 ☐ 21

Opgave 11 (5 point)

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = \frac{2+i}{3-i} + \frac{3+i}{2}, \qquad z_2 = (e^{1+\frac{\pi}{3}i})^6.$$

(a) (3 point). Hvad giver z_1 skrevet på standard form?

☒ $2+i$ ☐ $3-2i$ ☐ $-i$ ☐ $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$ ☐ 0

(b) (2 point). Hvad giver z_2 skrevet på standard form?

☐ 1 ☐ $-e^6$ ☐ e^3 ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☒ e^6

Bemærkning. I opgave 12 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 12 (6 point)

Lad $\mathcal{T}$ være området i rummet bestående af de punkter (x,y,z), som opfylder ulighederne

$$-2 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4-x^2, \quad -y \leq z \leq y.$$

Et legeme med massetætheden (densiteten) $\delta(x,y,z) = 3-y$ dækker netop området $\mathcal{T}$. Legemets rumfang (volumen) betegnes V, og legemets masse betegnes m. Markér samtlige korrekte udtryk nedenfor. Bemærk: Du skal **ikke** beregne integralerne.

☒ $m = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{-y}^{y}(3-y)\,dzdydx.$

☒ $m = \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}}\int_{-y}^{y}(3-y)\,dzdxdy.$

☐ $m = \int_{0}^{4-x^2}\int_{-2}^{2}\int_{-y}^{y}(3-y)\,dzdxdy.$

☐ $V = \int_{0}^{4-x^2}\int_{-2}^{2}\int_{-y}^{y} dzdxdy.$

☒ $V = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{-y}^{y} dzdydx.$

Opgave 13 (10 point).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

(a) (2 point). Der gælder, at

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{5\pi}{4}.$$

☐ Sand ☒ Falsk

(b) (2 point). Lad D være området i planen bestående af de punkter (x,y), som opfylder ulighederne $0 \leq x \leq 1$ og $0 < y \leq 1$. Lad f være funktionen med forskrift

$$f(x,y) = x^2y + \frac{1}{y}$$

og definitionsmængde D. Da antager f globalt maksimum på D.

☐ Sand ☒ Falsk

(c) (2 point). Definitionsmængden for funktionen $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ er $\mathbf{R}^2$ svarende til hele xy-planen.

☒ Sand ☐ Falsk

(d) (2 point). For funktionen $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, eksisterer den partielle afledede $f_x(x,y)$ ikke i punktet $(x,y) = (0,0)$.

☒ Sand ☐ Falsk

(e) (2 point). Punktet med rektangulære koordinater $(x,y) = (1,1)$ kan i polære koordinater angives ved $(r,\theta) = (-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$.

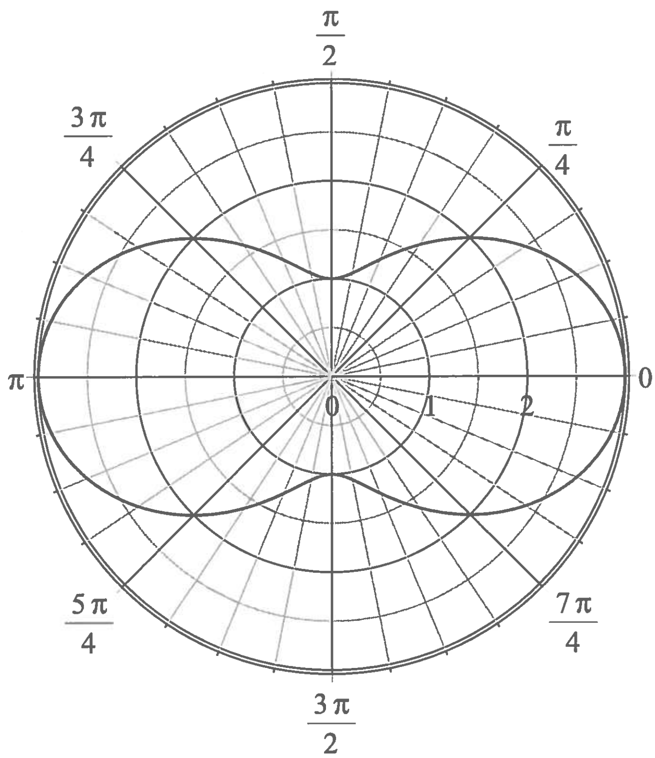
☒ Sand ☐ Falsk

Opgave 14 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f svarer til figuren?

- ☐ $f(\theta) = 2 - \cos(3\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 2 + \cos(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \sin(3\theta)$
- ☒ $f(\theta) = 2 + \cos(2\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 2 + \sin(2\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \sin(\theta)$