Reeksamen i Calculus

Onsdag den 17. februar 2016

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt, de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. Del II **skal afkrydses i nærværende opgavesæt**.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer** desuden siderne, og angiv **antallet af afleverede ark** på side 1 af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMER: ______________________________

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8%)

En plan kurve er givet ved

$$x = e^t,$$
$$y = e^{-t},$$

hvor t gennemløber de reelle tal.

(a) Bestem et udtryk for kurvens krumning $\kappa(t)$.

(b) Godtgør at punktet $P = (1,1)$ ligger på kurven, og beregn krumningen af kurven i dette punkt.

Opgave 2 (7%)

Bestem Taylorpolynomiet af anden grad for funktionen

$$f(x) = \sqrt{2x+1}$$

med udviklingspunkt $x = 0$.

Opgave 3 (10%)

(a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

(b) Find den fuldstændige løsning til den inhomogene differentialligning

$$y'' + 3y' + 2y = 4t + 8.$$

Opgave 4 (8%)

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{x+y}{4}\right).$$

(a) Angiv definitionsmængden for f.

(b) Skitser niveaukurven givet ved ligningen $f(x,y) = 1$.

Opgave 5 (8%)

En funktion er defineret som

$$f(x,y,z) = \sin(2x+y) + z^2.$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x,y,z)$.

(b) I hvilken retning ud fra punktet $P = (1,-2,1)$, vokser f kraftigst? (Angiv en enhedsvektor).

Opgave 6 (12%)

En flade $\mathscr{F}$ i rummet er givet ved ligningen $z = f(x,y)$, hvor

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y).$$

(a) Godtgør, at punktet $P = (2,-3,0)$ ligger på fladen $\mathscr{F}$.

(b) Bestem de partielle afledede $f_x(x,y)$ og $f_y(x,y)$.

(c) Find en ligning for tangentplanen til $\mathscr{F}$ i punktet $P = (2,-3,0)$.

Opgave 7 (12%)

Lad $\mathscr{R}$ være området i planen bestående af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 9.$$

(a) Skitser området $\mathscr{R}$.

(b) Beregn planintegralet

$$\iint_{\mathscr{R}} \frac{1}{x^2 + y^2}\, dA.$$

Opgave 8 (7%)

Find de komplekse rødder i polynomiet

$$z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 7i.$$

Del II ("multiple choice” opgaver)

Opgave 9 (10%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

a. For ethvert reelt tal b har følgende ligning i den ubekendte x netop én løsning:

$$\arcsin(x) = b.$$

☐ Sand ☐ Falsk

b. For funktionen $f(t) = e^{(1+2i)t}$, hvor t er en reel variabel, gælder der

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = 1 + 2i.$$

☐ Sand ☐ Falsk

c. Lad D være området i planen bestående af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne $-1 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 1$. Lad f være funktionen med forskrift

$$f(x, y) = \sin(x + y) + x^3$$

og definitionsmængde D. Da antager f globalt minimum på D.

☐ Sand ☐ Falsk

d. For ethvert komplekst tal z gælder der

$$z\overline{z} \geq 0.$$

☐ Sand ☐ Falsk

e. Punktet med rektangulære koordinater $(x, y) = (1, 2)$ kan i polære koordinater angives ved $(r, \theta) = (\sqrt{5}, \frac{\pi}{4})$.

☐ Sand ☐ Falsk

Bemærkning. I opgaverne 10 og 11 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 10 (6%)

Lad $\mathcal{T}$ være området i rummet bestående af de punkter (x, y, z), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2.$$

Et legeme med massetætheden (densiteten) $\delta(x, y, z) = 3 - x^2 - y^2 - z^2$ dækker netop dette område. Legemets rumfang (volumen) betegnes V, og legemets masse betegnes m. Markér samtlige korrekte udtryk nedenfor. Bemærk: Du skal **ikke** beregne integralerne.

- [ ] $m = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2-(1-x)^2} (3 - x^2 - y^2 - z^2)\, dz dy dx.$
- [ ] $m = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2-y^2} (3 - x^2 - y^2 - z^2)\, dz dy dx.$
- [ ] $m = \int_0^1 \int_{1+y}^{1-y} \int_0^{1-x^2-y^2} (3 - x^2 - y^2 - z^2)\, dz dx dy.$
- [ ] $V = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x^2-y^2} dz dx dy.$
- [ ] $V = \int_0^1 \int_0^{2} \int_0^{1-x^2-y^2} dz dy dx.$

Opgave 11 (6%)

Et komplekst polynomium er givet ved

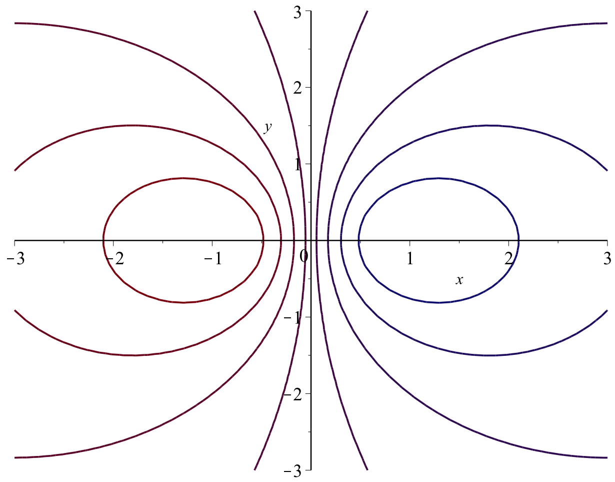
$$p(z) = z^3 + 5z^2 + z + 5.$$

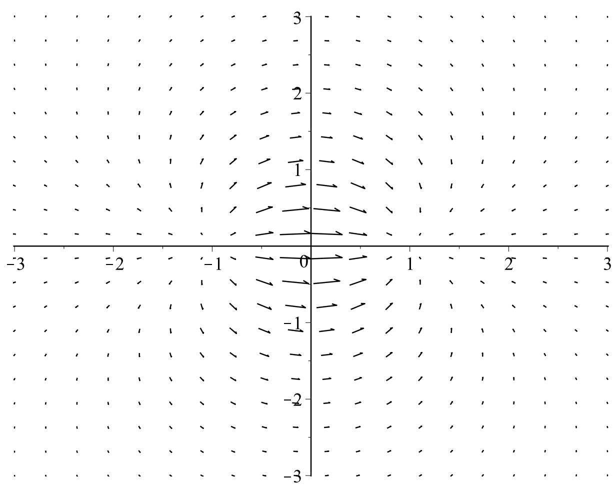
Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor.

- [ ] Det komplekse tal i er en rod i polynomiet $p(z)$.
- [ ] $p(z)$ har ingen reelle rødder.
- [ ] $p(z)$ har præcis 3 rødder regnet med multiplicitet.
- [ ] $p(z)$ har tre forskellige rødder.
- [ ] $p(z)$ har en rod med multipliciteten 3.

Opgave 12 (6%)

En differentiabel funktion $f(x,y)$ er defineret for $-3 \leq x \leq 3$ og $-3 \leq y \leq 3$. De to figurer herunder viser udvalgte niveaukurver samt gradientvektorer for funktionen. Der er netop to kritiske punkter med koordinaterne $(-1,0)$ og $(1,0)$. Afgør typen af hvert kritisk punkt, og markér svaret nedenfor.





a. I punktet $(-1,0)$ har f et

- ☐ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt

b. I punktet $(1,0)$ har f et

- ☐ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt