

Facit

Reksamen i Calculus

Onsdag den 17. februar 2016

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt, de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. Del II **skal afkrydses i nærværende opgavesæt**.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer** desuden siderne, og angiv **antallet af afleverede ark** på side 1 af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN:

STUDIENUMMER:

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8%)

En plan kurve er givet ved

$$\begin{aligned}x &= e^t, \\y &= e^{-t},\end{aligned}$$

hvor t gennemløber de reelle tal.

(a) Bestem et udtryk for kurvens krumning $\kappa(t)$.

$$\frac{2}{(e^{2t} + e^{-2t})^{3/2}}$$

(b) Godtgør at punktet $P = (1, 1)$ ligger på kurven, og beregn krumningen af kurven i dette punkt.

$$\begin{aligned}e^t = 1 \wedge e^{-t} = 1 &\Leftrightarrow t = 0 \\ \kappa(0) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Opgave 2 (7%)

Bestem Taylorpolynomiet af anden grad for funktionen

$$f(x) = \sqrt{2x+1}$$

med udviklingspunkt $x = 0$.

$$1 + x - \frac{1}{2}x^2$$

Opgave 3 (10%)

(a) Find den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

$$c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

(b) Find den fuldstændige løsning til den inhomogene differentiaalligning

$$y'' + 3y' + 2y = 4t + 8.$$

$$2t + 1 + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

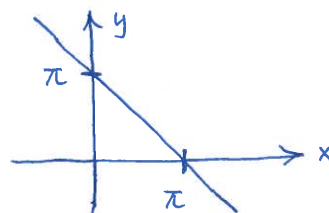
Opgave 4 (8%)

Betragt funktionen

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{x+y}{4}\right).$$

- (a) Angiv definitionsmængden for f .
- (b) Skitser niveaukurven givet ved ligningen $f(x, y) = 1$.

$$D_m(f) = \mathbb{R}^2$$



Opgave 5 (8%)

En funktion er defineret som

$$f(x, y, z) = \sin(2x + y) + z^2.$$

- (a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x, y, z)$.
- (b) I hvilken retning ud fra punktet $P = (1, -2, 1)$, vokser f kraftigst? (Angiv en enhedsvektor).

$$\begin{bmatrix} 2 \cos(2x+y) \\ \cos(2x+y) \\ 2z \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Opgave 6 (12%)

En flade \mathcal{F} i rummet er givet ved ligningen $z = f(x, y)$, hvor

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y).$$

- (a) Godtgør, at punktet $P = (2, -3, 0)$ ligger på fladen \mathcal{F} .
- (b) Bestem de partielle afledede $f_x(x, y)$ og $f_y(x, y)$.
- (c) Find en ligning for tangentplanen til \mathcal{F} i punktet $P = (2, -3, 0)$.

$$\ln(2^2 + (-3)) = \ln(1) = 0$$

$$\frac{2x}{x^2+y}, \quad \frac{1}{x^2+y}$$

$$4x + y - z = 5$$

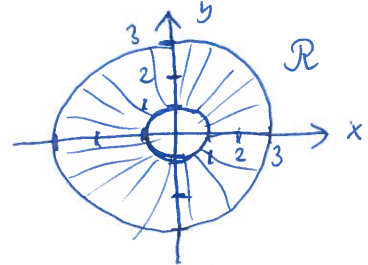
Opgave 7 (12%)

Lad \mathcal{R} være området i planen bestående af de punkter (x, y) , som opfylder ulighederne

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 9.$$

- (a) Skitser området \mathcal{R} .
- (b) Beregn planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{x^2 + y^2} dA.$$



$$2\pi \ln(3)$$

Opgave 8 (7%)

Find de komplekse rødder i polynomiet

$$z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 7i.$$

$$2 + i, 1 + 3i$$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (10%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

- a. For ethvert reelt tal b har følgende ligning i den ubekendte x netop én løsning:

$$\arcsin(x) = b.$$

Sand

Falsk

- b. For funktionen $f(t) = e^{(1+2i)t}$, hvor t er en reel variabel, gælder der

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = 1 + 2i.$$

Sand

Falsk

- c. Lad D være området i planen bestående af de punkter (x, y) , som opfylder ulighederne $-1 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 1$. Lad f være funktionen med forskrift

$$f(x, y) = \sin(x + y) + x^3$$

og definitionsmængde D . Da antager f globalt minimum på D .

Sand

Falsk

- d. For ethvert komplekst tal z gælder der

$$z\bar{z} \geq 0.$$

Sand

Falsk

- e. Punktet med rektangulære koordinater $(x, y) = (1, 2)$ kan i polære koordinater angives ved $(r, \theta) = (\sqrt{5}, \frac{\pi}{4})$.

Sand

Falsk

Bemærkning. I opgaverne 10 og 11 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 10 (6%)

Lad \mathcal{T} være området i rummet bestående af de punkter (x, y, z) , som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2.$$

Et legeme med massetætheden (densiteten) $\delta(x, y, z) = 3 - x^2 - y^2 - z^2$ dækker netop dette område. Legemets rumfang (volumen) betegnes V , og legemets masse betegnes m . Markér samtlige korrekte udtryk nedenfor. Bemærk: Du skal **ikke** beregne integralerne.

$m = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2-(1-x)^2} (3 - x^2 - y^2 - z^2) dz dy dx.$

$m = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2-y^2} (3 - x^2 - y^2 - z^2) dz dy dx.$

$m = \int_0^1 \int_{1+y}^{1-y} \int_0^{1-x^2-y^2} (3 - x^2 - y^2 - z^2) dz dx dy.$

$V = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x^2-y^2} dz dx dy.$

$V = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-x^2-y^2} dz dy dx.$

Opgave 11 (6%)

Et komplekst polynomium er givet ved

$$p(z) = z^3 + 5z^2 + z + 5.$$

Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor.

Det komplekse tal i er en rod i polynomiet $p(z)$.

$p(z)$ har ingen reelle rødder.

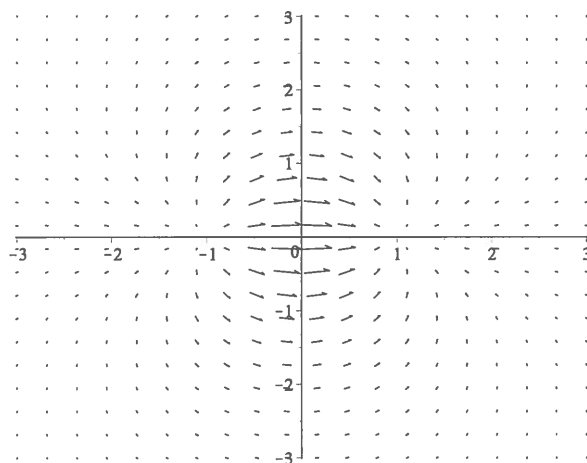
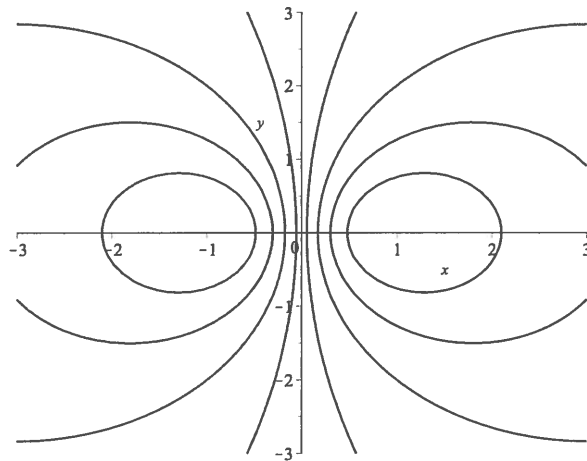
$p(z)$ har præcis 3 rødder regnet med multiplicitet.

$p(z)$ har tre forskellige rødder.

$p(z)$ har en rod med multipliciteten 3.

Opgave 12 (6%)

En differentiabel funktion $f(x, y)$ er defineret for $-3 \leq x \leq 3$ og $-3 \leq y \leq 3$. De to figurer herunder viser udvalgte niveaukurver samt gradientvektorer for funktionen. Der er netop to kritiske punkter med koordinaterne $(-1, 0)$ og $(1, 0)$. Afgør typen af hvert kritisk punkt, og markér svaret nedenfor.



a. I punktet $(-1, 0)$ har f et

- lokalt maksimum
- lokalt minimum
- saddepunkt

b. I punktet $(1, 0)$ har f et

- lokalt maksimum
- lokalt minimum
- saddepunkt