

Reeksamen i Calculus

Tirsdag den 18. august 2015

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

og

Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. Del II **skal afkrydses i nærværende opgavesæt**.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer** desuden siderne og angiv **antallet af afleverede ark** på 1. side af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN:

STUDIENUMMER:

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8%)

Betragt den plane kurve givet ved

$$\begin{aligned}x &= t^3 + 1, \\y &= 4t - 1,\end{aligned}$$

hvor $t \in \mathbb{R}$.

- Find kurvens krumning $\kappa(t)$ for $t \in \mathbb{R}$.
- Eftervis at punktet $P = (2, 3)$ ligger på kurven, og beregn krumningen af kurven i dette punkt.

Opgave 2 (10%)

- Find den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

- Løs begyndelsesværdiproblemet

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

Opgave 3 (7%)

Bestem Taylorpolynomiet af 4. grad for funktionen

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

med udviklingspunkt $a = 0$.

Opgave 4 (8%)

Betragt funktionen

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}.$$

- (a) Angiv definitionsmængden for f .
- (b) Skitser niveaukurven givet ved ligningen $f(x, y) = -2$.

Opgave 5 (12%)

En funktion er defineret som

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 2).$$

- (a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x, y)$.
- (b) Beregn den retningsafledede af f i punktet $P = (1, -1)$ og retningen givet ved

$$\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

- (c) Find et kritisk punkt for funktionen f .

Opgave 6 (12%)

Et område i planen er givet ved

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

- (a) Skitser området \mathcal{R} .
- (b) Beregn planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dA.$$

Opgave 7 (7%)

Find samtlige komplekse rødder i polynomiet

$$z^2 - 3z + 3 - i.$$

Opgave 8 (8%)

En flade \mathcal{F} i rummet er bestemt ved ligningen

$$z = \arctan(x - y).$$

- (a) Godtgør at punktet $P = (2, 1, \frac{\pi}{4})$ ligger på fladen \mathcal{F} .
- (b) Find en ligning for tangentplanen til \mathcal{F} i punktet $P = (2, 1, \frac{\pi}{4})$.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (10%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

- a. For ethvert komplekst tal z gælder der

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z).$$

Sand

Falsk

- b. Der gælder, at

$$\sin(2x) = 2\sin(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

Sand

Falsk

- c. Lad $f(x, y)$ være en funktion defineret på \mathbb{R}^2 . Hvis $f_x(a, b) = 0$ og $f_y(a, b) = 0$, så antager $f(x, y)$ lokalt maksimum eller lokalt minimum i punktet (a, b) .

Sand

Falsk

- d. Hvis x er et reelt tal, og $\tan(x) \neq 0$, så er

$$\tan(x) \arctan(x) = 1.$$

Sand

Falsk

- e. Der gælder at

$$e^{2\pi i} = 1.$$

Sand

Falsk

Bemærkning. I opgaverne 10 og 11 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 10 (7%)

Et legeme \mathcal{T} dækker præcis området i rummet givet ved

$$\{(x, y, z) : (x, y) \in \mathcal{R}, \quad y \leq z \leq 2y\}$$

hvor

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, \quad x^2 + 1 \leq y \leq 2\}.$$

Massetætheden (densiteten) for \mathcal{T} er $\delta(x, y, z) = z$. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor. Bemærk: Integralerne skal **ikke** evalueres.

- \mathcal{T} 's masse kan udregnes som følger: $m = \int_{-1}^1 \int_{x^2+1}^2 \int_y^{2y} z \, dz \, dx \, dy$.
- \mathcal{T} 's masse kan udregnes som følger: $m = \int_{-1}^1 \int_{x^2+1}^2 \int_y^{2y} z \, dz \, dy \, dx$.
- \mathcal{T} 's volumen kan udregnes som følger: $V = \int_1^2 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_y^{2y} dz \, dx \, dy$.
- \mathcal{T} 's volumen kan udregnes som følger: $V = \int_1^2 \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} \int_y^{2y} dz \, dx \, dy$.
- \mathcal{T} 's volumen kan udregnes som følger: $V = \int_{-1}^1 \int_{x^2+1}^2 \int_y^{2y} dz \, dy \, dx$.

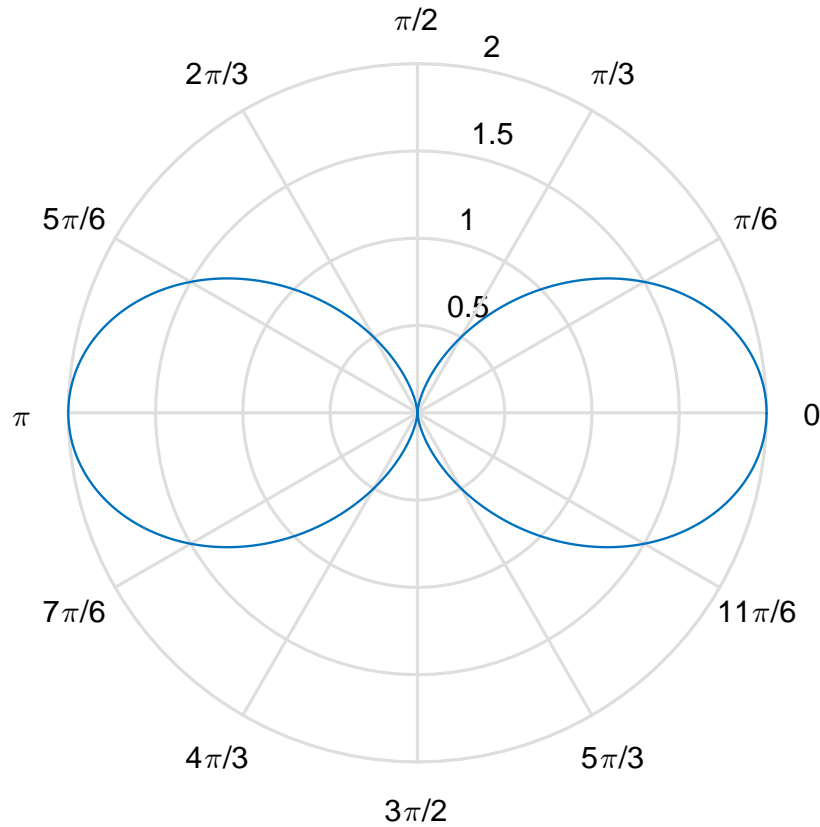
Opgave 11 (6%)

Lad $p(z)$ være et komplekst polynomium af grad 7. Det oplyses, at $p(z)$ har reelle koefficienter. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor.

- $p(z)$ vil altid have 7 komplekse rødder regnet med multiplicitet.
- Der findes altid et 1. grads polynomium $q_1(z)$ med reelle koefficienter og et 6. grads polynomium $q_2(z)$, således at $p(z) = q_1(z)q_2(z)$.
- Hvis $z_0 \neq 0$ er en kompleks rod i $p(z)$, så er z_0^{-1} også en kompleks rod i $p(z)$.
- $p(z)$ vil altid have 7 reelle rødder regnet med multiplicitet.
- $p(z)$ vil altid have mindst én reel rod.

Opgave 12 (5%)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen $r = f(\theta)$ afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f med tilhørende definitionsmængde for θ svarer til ovenstående figur?

- $f(\theta) = 2 - \cos(3\theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$
- $f(\theta) = 1 + \sin(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- $f(\theta) = 1 + \cos(4\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- $f(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- $f(\theta) = 1 + \sin(2\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- $f(\theta) = 1 - \sin(2\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$