Reeksamen i Calculus

Mandag den 11. august 2014

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

STUDIENUMMER: ______________________________

HOLD NUMMER: ☐ Hold 1 (v. Lisbeth Fajstrup)
☐ Hold 2 (v. Jacob Broe)
☐ Hold 4 (v. Morten Nielsen)

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8%)

En flade $\mathscr{F}$ er givet implicit som løsningsmængden til ligningen

$$F(x,y,z) = x^2 + 4y^2 - 8y + z^2 = 0.$$

(a) Verificer, at punktet $P(0,1,-2)$ ligger på $\mathscr{F}$. $F(0,1,-2) = 4\cdot 1^2 - 8\cdot 1 + (-2)^2 = 0.$

(b) Bestem en ligning for tangentplanen til $\mathscr{F}$ i punktet $P(0,1,-2)$.

$\nabla F = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y-8 \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla F(0,1,-2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

TP: $0\cdot(x-0) + 0\cdot(y-1) - 4(z-(-2)) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -2$

Opgave 2 (7%)

Angiv Taylorpolynomiet af 3. grad for

$$f(x) = 1 + x + \sin(x),$$

med udviklingspunkt $a = 0$.

$P_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$= 1 + 2x - \frac{1}{6}x^3.$

$f(0) = 1$

$f'(x) = 1 + \cos(x) \Rightarrow f'(0) = 2$

$f''(x) = -\sin(x) \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f'''(0) = -1.$

Opgave 3 (12%)

(a) Find den fuldstændige (generelle) løsning til differentialligningen

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

$\Downarrow \; r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(b) Løs begyndelsesværdiproblemet

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

Bemærk: $y'(t) = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t}$

Dvs: $\left.\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 2 \\ y'(0) &= c_1 + 2c_2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_2 = -1, \; c_1 = 3$

Altså $y(x) = 3e^t - e^{2t}.$

Opgave 4 (8%)

Find samtlige komplekse rødder i polynomiet

$$p(z) = z^2 - (2+i)z + 2i.$$

$D = (-(2+i))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2i = 3-4i = (\pm(2-i))^2$

$z = \frac{2+i \pm (2-i)}{2} = \begin{cases} 2 \\ i \end{cases}$

Opgave 5 (12%)

En tynd plade dækker netop området

$$\mathscr{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge 0\}$$

i xy-planen. Pladen har massetæthed (densitet) $\delta(x, y) = x^2 + y^2$.

Bestem pladens masse.

$m = \iint_R \delta \, dA = \int_0^{\pi} \int_1^3 r^2 \, r \, dr d\theta = \pi \left[\frac{1}{4} r^4\right]_1^3 = \frac{80}{4}\pi = 20\pi$

Opgave 6 (12%)

Betragt funktionen

$$f(x, y) = \sin(y) + x + \cos(x) - 2y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x, y)$.

(b) Funktionen $g(x)$ er implicit defineret ved $f(x, g(x)) = 1$. Bestem $g(0)$ og $g'(0)$.

a) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - \sin x \\ \cos y - 2 \end{pmatrix}.$

b) $f(0, g(0)) = \sin(g(0)) + \cos(0) - 2g(0) = 1$

$\sin(g(0)) = 2g(0) \Rightarrow g(0) = 0.$

$g'(0) = -\frac{f_x}{f_y}\Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{(-1)} = 1.$

Opgave 7 (5%)

Betragt funktionen

$$f(x, y) = \arccos(x^2 + y^2).$$

(a) Bestem definitionsmængden for f. $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

(b) Bestem de partielle afledede $f_x(x, y)$ og $f_y(x, y)$.

$$f_x(x,y) = \frac{-2x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}, \quad f_y(x,y) = \frac{-2y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}.$$

Opgave 8 (8%)

Betragt kurven i rummet givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \cos(2t)\,\mathbf{i} + \sin(2t)\,\mathbf{j} + \sqrt{5}t\mathbf{k}, \qquad t \in [-1, 2\pi].$$

Bestem kurvens buelængde fra $t = 0$ til $t = \pi$.

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt{(-2\sin(2t))^2 + (2\cos(2t))^2 + (\sqrt{5})^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{4+5}\, dt = \underline{\underline{3\pi}}$$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (10%).

Besvar følgende 6 sand/falsk opgaver:

a. Der gælder, at

$$\sin(\alpha + \beta) = 2\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

for *alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.

☐ Sand ☒ Falsk

b. En kontinuert differentiabel funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som i $P \in \mathbb{R}^2$ opfylder, at $\nabla f(P) = \mathbf{0}$ har altid et lokalt ekstrema i P.

☐ Sand ☒ Falsk

c. For et komplekst tal $z \neq 0$ gælder, at

$$\frac{1}{z^2} = \frac{\overline{z}^2}{|z|^4}.$$

☒ Sand ☐ Falsk

d. Følgende ligning gælder for den inverse tangens funktion:

$$\arctan(\tan(x)) = x, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

☒ Sand ☐ Falsk

e. En reel funktion f, defineret på et område $\mathscr{R}$ i xy-planen, har et globalt maksimum i $(a, b) \in \mathscr{R}$ hvis $f(a, b) \geq f(x, y)$ for alle $(x, y) \in \mathscr{R}$.

☒ Sand ☐ Falsk

f. Der gælder, at

$$\frac{d}{dx}\arctan(\sqrt{x}) = \frac{1}{1+x}$$

for *alle* $x > 0$.

☐ Sand ☒ Falsk

Bemærkning. I opgaverne 10–12 evalueres der efter følgende princip: hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning. Man får derfor *intet* ud af "helgarderinger".

Opgave 10 (6%)

Et legeme T dækker præcis området i rummet givet ved

$$\{(x, y, z): \quad (x, y) \in R, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\},$$

hvor

$$R = \{(x, y): \quad 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Massetætheden (densiteten) for T er $\delta(x, y, z) = 1 + z$. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor (bemærk: integralerne skal **ikke** evalueres).

☒ T's masse kan udregnes som følger: $m = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{x^2+y^2} (1+z)\, dz dy dx$

☐ T's volumen kan udregnes som følger: $V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{x^2+y^2} (1+z)\, dz dy dx$

☐ T's masse kan udregnes som følger: $m = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{x^2+y^2} (1+z)\, dz dx dy$

☐ T's masse kan udregnes som følger: $m = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \int_0^{x^2+y^2} (1+z)\, dz dy dx$

☒ T's volumen kan udregnes som følger: $V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{x^2+y^2} dz dy dx.$

Opgave 11 (5%)

Lad $f(x, y)$ være en kontinuert reel funktion defineret på et område R i planen. R består af punkterne på og indenfor en simpel lukket kurve C. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor.

☒ f har altid et globalt ekstremum på R.

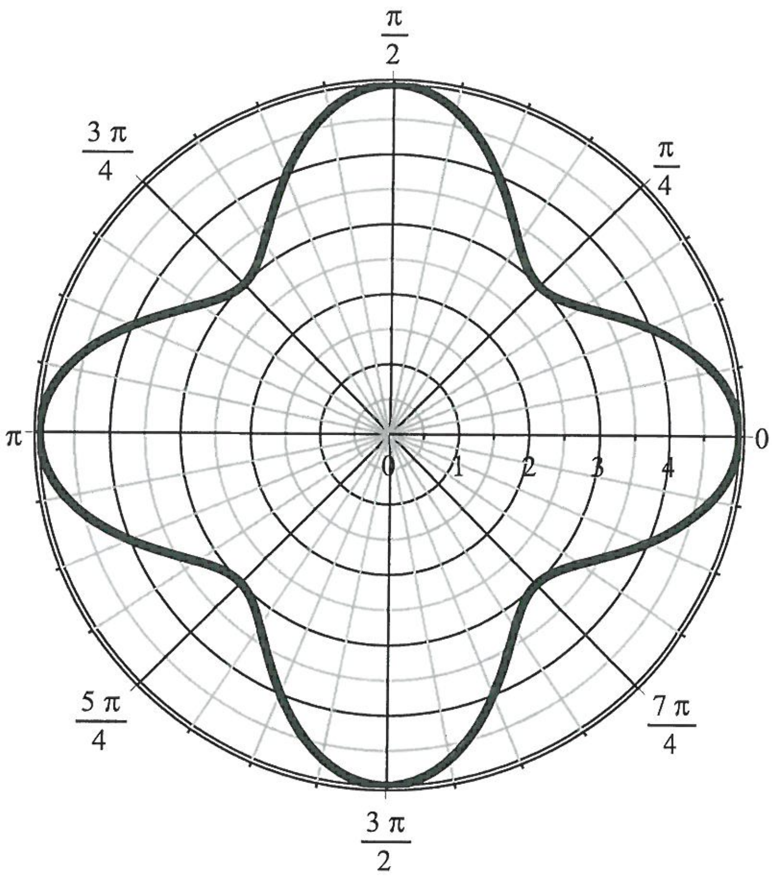
☐ f har altid et globalt ekstremum på randen C.

☒ Hvis f har vandret tangentplan i punktet $\mathbf{a} \in R$, så kaldes $\mathbf{a}$ et kritisk punkt for f.

☐ Hvis f har et lokalt ekstremum i $\mathbf{a} \in R$, så eksisterer de partielle afledede for f i $\mathbf{a}$.

Opgave 12 (7%)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen $r = f(\theta)$ afbildet i polære koordinater.



Hvilken (hvilke) af nedenstående forskrifter for f, samt tilhørende definitionsmængde for θ, svarer til ovenstående figur.

☐ $f(\theta) = 2 + \sin(4\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$

☒ $f(\theta) = 4 + \cos(4\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$

☐ $f(\theta) = 2 + \cos(4\theta),\ 0 \le \theta \le \pi$

☐ $f(\theta) = 3 + 2\sin(2\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$

☐ $f(\theta) = 2 + \sin(2\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$

☐ $f(\theta) = 5\cos(2\theta),\ 0 \le \theta \le \pi.$