Reeksamen i Calculus
Tirsdag den 20. august 2013

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMER: ______________________________

HOLD NUMMER:
- ☐ Hold 1 (v. Lisbeth Fajstrup)
- ☐ Hold 2 (v. Nikolaj Hess-Nielsen)
- ☐ Hold 4 (v. Morten Nielsen)

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (12%)

(a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' + 2y' - 5y = 0.$$

(b) Find den fuldstændige løsning til den inhomogene differentialligning

$$y'' + 2y' - 5y = 3t + 1.$$

Opgave 2 (7%)

Bestem Taylorpolynomiet af 3. grad for

$$f(x) = \sin(2x) - x,$$

med udviklingspunkt $a = 0$.

Opgave 3 (8%)

En flade $\mathscr{F}$ er givet ved $z = f(x, y)$, hvor

$$f(x, y) = x^2 + y^4.$$

Bestem en ligning for tangentplanen til $\mathscr{F}$ i punktet $P(2, 1, f(2, 1))$.

Opgave 4 (8%)

Find rødderne i den komplekse andengradsligning

$$z^2 - (1+3i)z - 2 + 2i = 0.$$

Opgave 5 (16%)

(a) Området $\mathscr{R}$ i xy-planen er afgrænset af kurverne $y = x$ og $y = \sqrt{x}$. Skitsér $\mathscr{R}$.

(b) Beregn planintegralet af $f(x, y) = x^2$ over området $\mathscr{R}$.

(c) Et legeme T med massetæthed $\delta(x, y, z) = x^2$ dækker netop området i rummet givet ved

$$\{(x, y, z) : (x, y) \in \mathscr{R}, 0 \leq z \leq x\}.$$

Udregn T's masse.

Opgave 6 (8%)

Betragt funktionen

$$f(x, y, z) = 3z^2 + \sqrt{x^2 + y^4},$$

defineret for $\{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x, y, z)$.

(b) I hvilken retning vokser f hurtigst i punktet $P(2, 1, 0)$?

Opgave 7 (5%)

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \sin(x^2) + \cos(xy).$$

(a) Bestem definitionsmængden for f.

(b) Bestem de partielle afledede $f_x(x,y)$ og $f_y(x,y)$.

Opgave 8 (8%)

Betragt den parametriske kurve givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^3}{3}\mathbf{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} = \begin{bmatrix} t^3/3 \\ t^2/\sqrt{2} \\ t \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Beregn kurvens buelængde fra $t = 0$ til $t = 3$. Vink: $(1+a)^2 = 1 + a^2 + 2a$.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Bemærkning. I opgaverne 9–12 evalueres der efter følgende princip: hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning. Man får derfor *intet* ud af "helgarderinger".

Opgave 9 (6%)

Et legeme T dækker præcis området i rummet givet ved

$$\{(x,y,z): \quad (x,y)\in R,\, y \le z \le \sqrt{x}+2y^2\},$$

hvor

$$R = \{(x,y): \quad 0 \le x \le 1,\, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}.$$

Massetætheden (densiteten) for T er $\delta(x,y,z) = xz^2$. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor (bemærk: integralerne skal **ikke** evalueres).

- ☐ T's masse kan udregnes som følger: $m = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_y^{\sqrt{x}+2y^2} xz^2\, dz dy dx$
- ☐ T's volumen kan udregnes som følger: $V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_y^{\sqrt{x}+2y^2} z^2\, dz dy dx$
- ☐ T's masse kan udregnes som følger: $m = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_y^{\sqrt{x}+2y^2} xz^2\, dz dx dy$
- ☐ T's masse kan udregnes som følger: $m = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_y^{\sqrt{x}+2y^2} x^2z^4\, dz dy dx$
- ☐ T's volumen kan udregnes som følger: $V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_y^{\sqrt{x}+2y^2} dz dy dx.$

Opgave 10 (5%)

Betragt et komplekst polynomium $p(z)$ af grad 5. Marker samtlige korrekte udsagn nedenfor.

- ☐ Der findes et $r_0 \in \mathbb{R}$, således at $p(z) = (z - r_0)q(z)$ med $q(z)$ et komplekst polynomium af grad 4.
- ☐ $p(z)$ har præcis 5 forskellige komplekse rødder
- ☐ $p(z)$ har præcis 5 komplekse rødder regnet med multiplicitet
- ☐ Der findes et $z_0 \in \mathbb{C}$, således at $p(z) = (z - z_0)q(z)$ med $q(z)$ et komplekst polynomium af grad 4.

Opgave 11 (10%).

Besvar følgende 6 sand/falsk opgaver:

a. Buelængdefunktionen $s(t)$ for en differentiabel kurve $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ er defineret ved

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(\tau)|^2 \, d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

☐ Sand ☐ Falsk

b. Et komplekst polynomium

$$P(z) = a_n z^2 + \cdots + a_1 z + a_0,$$

hvor $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, kan skrives som et produkt af reelle 1. grads polynomier og reelle 2. grads polynomier.

☐ Sand ☐ Falsk

c. Der gælder, at

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1}(2x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}, \qquad x \in (-1/2, 1/2).$$

☐ Sand ☐ Falsk

d. En surjektiv (onto/på) funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har altid en invers funktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

☐ Sand ☐ Falsk

e. Der gælder, at

$$\cos\big(\arccos(x)\big) = x$$

for *alle* $x \in \mathbb{R}$.

☐ Sand ☐ Falsk

f. Der gælder, at

$$\sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$$

for *alle* $x \in \mathbb{R}$.

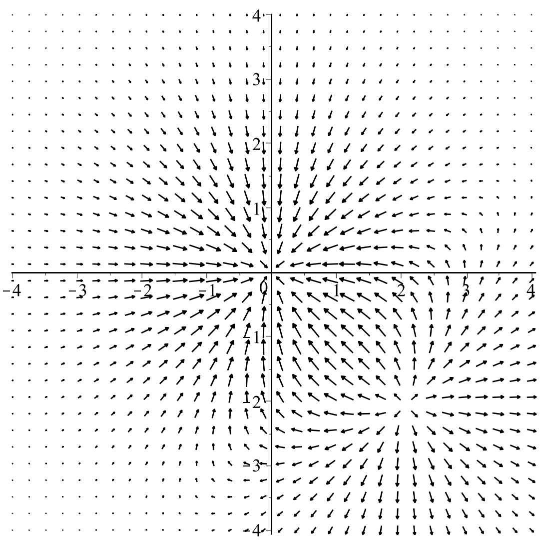
☐ Sand ☐ Falsk

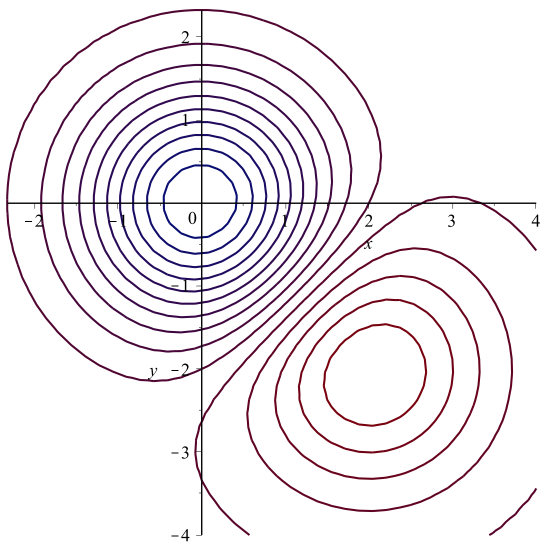
Opgave 12 (7%)

En funktion $f(x, y)$ er defineret på kvadratet

$$R = \{(x, y) : -4 \le x, y \le 4\}.$$

De to figurer nedenfor viser hhv. udvalgte gradientvektorer og niveaukurver for funktionen i dette kvadrat. Funktionen har to kritiske punkter i R, med koordinaterne hhv. $(0,0)$ og $(2,-2)$. Afgør ud fra plottene typen af hver af de kritiske punkter og markér svaret nedenfor.





(a) Punktet $(0,0)$ er et

- ☐ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt.

(b) Punktet $(2,-2)$ er et

- ☐ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt.