Reeksamen i Calculus

Torsdag den 16. august 2012

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLD NUMMER:
☐ Hold 1 (v. Jacob Broe)
☐ Hold 2 (v. Morten Nielsen og Mikkel Brynildsen)
☐ Hold 4 (v. Bo Rosbjerg)

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8%)

En flade $\mathscr{F}$ er givet implicit som løsningsmængden til ligningen

$$F(x, y, z) = 2x + 2\ln(2y) + z^2 - 9 = 0.$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla F(x, y, z)$.

(b) Bestem en ligning for tangentplanen til $\mathscr{F}$ gennem punktet $(4, \frac{1}{2}, 1)$.

Opgave 2 (16%)

(a) Find den entydigt bestemte løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0,$$

som opfylder, at

$$y(0) = 0 \quad \text{og} \quad y'(0) = 1.$$

(b) Find en partikulær løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = x.$$

(c) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = x.$$

Opgave 3 (8%)

Løs den komplekse andengradsligning

$$z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0.$$

Opgave 4 (8%)

Området $\mathscr{R}$ i xy-planen er givet ved

$$\mathscr{R} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, -y \leq x \leq y\}.$$

Find plantintegralet af $f(x, y) = x^2$ over området $\mathscr{R}$.

Opgave 5 (8%)

Angiv Taylorpolynomiet af 3. grad for

$$f(x) = \cos(2x),$$

med udviklingspunkt $a = 0$.

Opgave 6 (10%)

En tynd plade dækker netop området

$$\mathscr{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

i xy-planen. Pladen har massetæthed (densitet) $\delta(x, y) = y$.

Bestem pladens masse.

Opgave 7 (5%)

Betragt funktionen

$$f(x, y) = \sin(x + y^4).$$

(a) Bestem de partielle afledede $f_x(x, y)$ og $f_y(x, y)$.

(b) Opskriv differentialet df.

Opgave 8 (5%)

Betragt den plane kurve givet ved

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 2t^2, \end{aligned}$$

hvor $t \in \mathbb{R}$. Beregn kurvens krumningen $\kappa(t)$ for $t \in \mathbb{R}$.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Bemærkning. I opgaverne 9–12 evalueres der efter følgende princip: hver forkert afkrydsning ophæver én rigtigt afkrydsning. Man får derfor *intet* ud af "helgarderinger".

Opgave 9 (6%)

Et legeme T dækker det område i rummet som er givet ved

$$\{(x,y,z): \quad -1 \le y \le 2, \quad 0 \le x \le 4, \quad -x^2 \le z \le 1+y^2\}.$$

Massetætheden (densiteten) for T er $\delta(x,y,z) = 1+y^2$. Hvilke(t) af nedenstående 4 itererede integraler kan benyttes til at bestemme T's masse (bemærk: værdierne af integralerne skal *ikke* udregnes.)

☐ $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{0}^{4}\int_{-x^2}^{1+y^2}(1+y^2)\,dy\,dx\,dz.$

☐ $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{0}^{4}\int_{1+y^2}^{-x^2}(1+y^2)\,dz\,dy\,dx.$

☐ $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{0}^{4}\int_{-x^2}^{1+y^2}(1+y^2)\,dz\,dx\,dy.$

☐ $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{-1}^{2}\int_{-x^2}^{1+y^2}(1+y^2)\,dz\,dx\,dy.$

Opgave 10 (5%)

Betragt to komplekse tal $c_1 = r_1e^{i\theta_1}$ og $c_2 = r_2e^{i\theta_2}$, hvor $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor.

☐ $c_1c_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

☐ $\overline{c_1}c_2 = r_1r_2e^{i(\theta_2-\theta_1)}$

☐ $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, forudsat $r_2 \neq 0$.

☐ $c_1^7 = r_1^7e^{i\theta_1}$.

Opgave 11 (14%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

a. Betragt en kontinuert funktion f defineret på et område $\mathscr{R}$ i planen, hvor $\mathscr{R}$ er givet ved

$$\mathscr{R} = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \quad x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\},$$

hvor x_1 og x_2 er kontinuerte funktioner og $c \leq d$ er konstanter. Det tilhørende planintegral kan evalueres som følgende itererede integral

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

☐ Sand ☐ Falsk

b. En reel funktion f, defineret på et område $\mathscr{R}$ i xy-planen, har et globalt minimum i $(a, b) \in \mathscr{R}$ hvis $f(a, b) \geq f(x, y)$ for alle $(x, y) \in \mathscr{R}$.

☐ Sand ☐ Falsk

c. Betragt en differentiabel funktion $f(x, y, z)$ defineret på $\mathbb{R}^3$. Hvis $\nabla f(0, 0, 0) = \mathbf{0}$, så har f har et lokalt ekstrema i punktet $(0, 0, 0)$.

☐ Sand ☐ Falsk

d. Definitionsmængden for $f(x) = \arccos(x)$ er $[0, 1]$.

☐ Sand ☐ Falsk

e. For ethvert $y_0 \in \mathbb{R}$, så har ligningen i x,

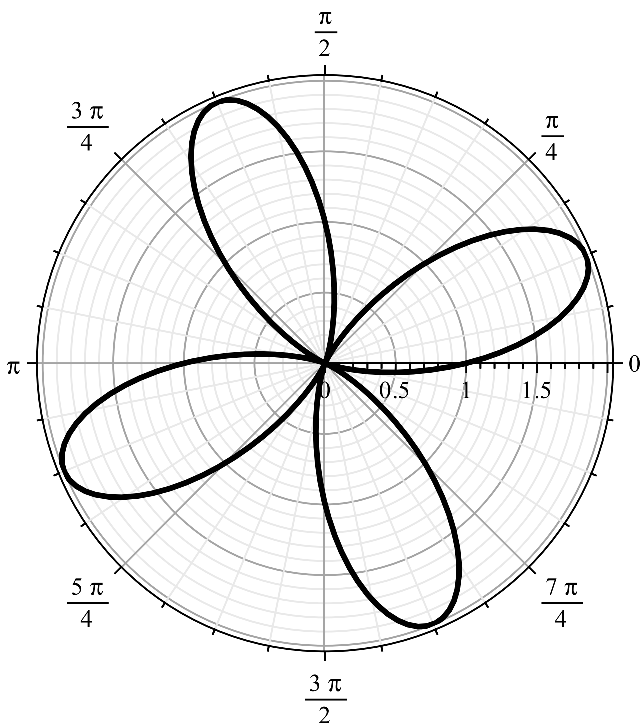
$$\arctan(x) = y_0,$$

mindst én løsning.

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 12 (7%)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen $r = f(\theta)$ afbildet i polære koordinater.



Hvilken (hvilke) af nedenstående forskrifter for f, samt tilhørende definitionsmænge for θ, svarer til ovenstående figur.

- ☐ $f(\theta) = 1 + \cos(4\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 2 - \cos(2\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \sin(4\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \sin(2\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 1 + 2\cos(2\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \sin(4\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$