

Reeksamen i Calculus

Torsdag den 16. august 2012

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

og

Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side af besvarelsen.** God arbejdslyst!

NAVN: _____

STUDIENUMMER: _____

- HOLD NUMMER: Hold 1 (v. Jacob Broe)
 Hold 2 (v. Morten Nielsen og Mikkel Brynildsen)
 Hold 4 (v. Bo Rosbjerg)

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8%)

En flade \mathcal{F} er givet implicit som løsningsmængden til ligningen

$$F(x, y, z) = 2x + 2\ln(2y) + z^2 - 9 = 0.$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla F(x, y, z)$.

$$\nabla F(x, y, z) = \left(2, \frac{2}{y}, 2z \right)$$

(b) Bestem en ligning for tangentplanen til \mathcal{F} gennem punktet $(4, \frac{1}{2}, 1)$.

$$x + 2y + z = 6$$

Opgave 2 (16%)

(a) Find den entydigt bestemte løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0,$$

som opfylder, at

$$y(0) = 0 \quad \text{og} \quad y'(0) = 1.$$

$$y(x) = e^{2x} \cdot \sin(x)$$

(b) Find en partikulær løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = x.$$

$$y_p(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{25}$$

(c) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = x.$$

$$y(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{25} + c_1 e^{2x} \cos(x) + c_2 e^{2x} \sin(x)$$

Opgave 3 (8%)

Løs den komplekse andengradsligning

$$z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0.$$

$$\Leftrightarrow z = 1 - i \vee z = 2i$$

Opgave 4 (8%)

Området \mathcal{R} i xy -planen er givet ved

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, -y \leq x \leq y\}.$$

Find plantintegralet af $f(x, y) = x^2$ over området \mathcal{R} .

$$\frac{1}{6}$$

Opgave 5 (8%)

Angiv Taylorpolynomiet af 3. grad for

$$f(x) = \cos(2x),$$

med udviklingspunkt $a = 0$.

$$1 - 2x^2$$

Opgave 6 (10%)

En tynd plade dækker netop området

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

i xy -planen. Pladen har massetæthed (densitet) $\delta(x, y) = y$.

Bestem pladens masse.

$$\frac{7}{3}$$

Opgave 7 (5%)

Betragt funktionen

$$f(x, y) = \sin(x + y^4).$$

(a) Bestem de partielle afledede $f_x(x, y)$ og $f_y(x, y)$.

(b) Opskriv differentialet df .

$$f_x(x, y) = \cos(x + y^4)$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 \cos(x + y^4)$$

$$df = \cos(x + y^4) \cdot (dx + 4y^3 dy)$$

Opgave 8 (5%)

Betragt den plane kurve givet ved

$$x = t$$

$$y = 2t^2,$$

hvor $t \in \mathbb{R}$. Beregn kurvens krumningen $\kappa(t)$ for $t \in \mathbb{R}$.

$$\kappa(t) = 4 \cdot (1 + 16t^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Bemærkning. I opgaverne 9–12 evalueres der efter følgende princip: hver forkert afkrydsning ophæver én rigtigt afkrydsning. Man får derfor *intet* ud af "helgarderinger".

Opgave 9 (6%)

Et legeme T dækker det område i rummet som er givet ved

$$\{(x, y, z): -1 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad -x^2 \leq z \leq 1 + y^2\}.$$

Massetætheden (densiteten) for T er $\delta(x, y, z) = 1 + y^2$. Hvilke(t) af nedenstående 4 itererede integraler kan benyttes til at bestemme T 's masse (bemærk: værdierne af integralerne skal *ikke* udregnes.)

$\int_{-1}^2 \int_0^4 \int_{-x^2}^{1+y^2} (1 + y^2) dy dx dz.$

$\int_{-1}^2 \int_0^4 \int_{1+y^2}^{-x^2} (1 + y^2) dz dy dx.$

$\int_{-1}^2 \int_0^4 \int_{-x^2}^{1+y^2} (1 + y^2) dz dx dy.$

$\int_0^4 \int_{-1}^2 \int_{-x^2}^{1+y^2} (1 + y^2) dz dx dy.$

Opgave 10 (5%)

Betragt to komplekse tal $c_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ og $c_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, hvor $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor.

$c_1 c_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$

$\overline{c_1} c_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_2 - \theta_1)}.$

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$ forudsat $r_2 \neq 0.$

$c_1^7 = r_1^7 e^{i\theta_1}.$

Opgave 11 (14%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

- a. Betragt en kontinuert funktion f defineret på et område \mathcal{R} i planen, hvor \mathcal{R} er givet ved

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \quad x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\},$$

hvor x_1 og x_2 er kontinuerte funktioner og $c \leq d$ er konstanter. Det tilhørende planintegral kan evalueres som følgende itererede integral

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Sand

Falsk

- b. En reel funktion f , defineret på et område \mathcal{R} i xy -planen, har et globalt minimum i $(a, b) \in \mathcal{R}$ hvis $f(a, b) \geq f(x, y)$ for alle $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Sand

Falsk

- c. Betragt en differentiabel funktion $f(x, y, z)$ defineret på \mathbb{R}^3 . Hvis $\nabla f(0, 0, 0) = \mathbf{0}$, så har f har et lokalt ekstrema i punktet $(0, 0, 0)$.

Sand

Falsk

- d. Definitionsmængden for $f(x) = \arccos(x)$ er $[0, 1]$.

Sand

Falsk

- e. For ethvert $y_0 \in \mathbb{R}$, så har ligningen i x ,

$$\arctan(x) = y_0,$$

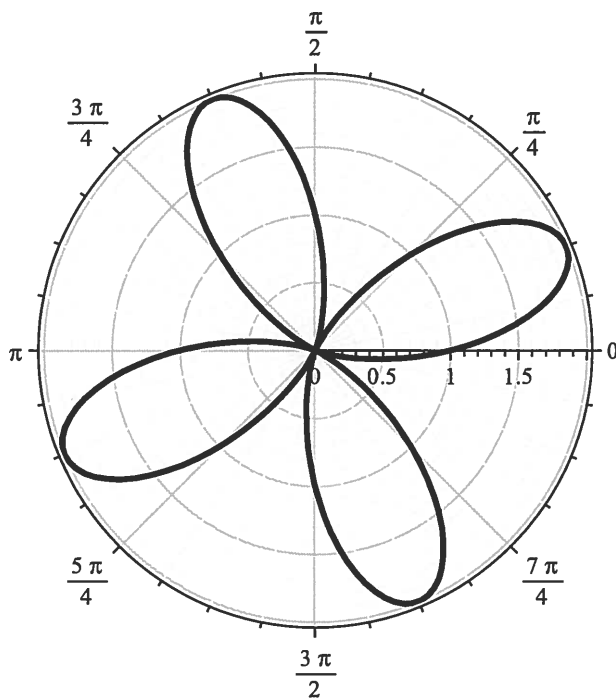
mindst én løsning.

Sand

Falsk

Opgave 12 (7%)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen $r = f(\theta)$ afbildet i polære koordinater.



Hvilken (hvilke) af nedenstående forskrifter for f , samt tilhørende definitionsmængde for θ , svarer til ovenstående figur.

- $f(\theta) = 1 + \cos(4\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- $f(\theta) = 2 - \cos(2\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$
- $f(\theta) = 1 + \sin(4\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$
- $f(\theta) = 1 + \sin(2\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- $f(\theta) = 1 + 2\cos(2\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$
- $f(\theta) = 1 + \sin(4\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.