

Eksamen i Calculus

Fredag den 8. januar 2016

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

og

Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt, de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. Del II **skal afkrydses i nærværende opgavesæt**.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummere** desuden siderne, og angiv **antallet af afleverede ark** på side 1 af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN:

STUDIENUMMER:

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8%)

En partikel bevæger sig langs en kurve i rummet. Partiklens koordinater til tiden t er givet ved

$$\begin{aligned}x &= 4t + 1, \\y &= \cos(3t), \\z &= \sin(3t).\end{aligned}$$

- (a) Bestem kurvens buelængde fra $t = 0$ til $t = 4$.
- (b) Find accelerationsvektoren for partiklen.

Opgave 2 (6%)

Lad $f(x)$ være en funktion der er tre gange differentiabel i $x = 0$. Taylorpolynomiet af grad 3 for $f(x)$ med udviklingspunkt $a = 0$ er

$$P_3(x) = 2 - 7x + x^3.$$

Bestem værdierne $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ og $f'''(0)$.

Opgave 3 (10%)

- (a) Find den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

- (b) Løs begyndelsesværdiproblemet

$$y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

Opgave 4 (8%)

Betragt funktionen

$$f(x, y) = \frac{5x + 3y - 1}{x + y}.$$

- (a) Angiv definitionsmængden for f .
- (b) Skitser niveaukurven givet ved ligningen $f(x, y) = 2$.

Opgave 5 (12%)

En funktion er defineret som

$$f(x, y) = xe^y.$$

- (a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x, y)$.
- (b) Beregn den retningsafledede af f i punktet $P = (1, 0)$ og retningen givet ved

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}.$$

- (c) I hvilken retning er den retningsafledede i punktet $P = (1, 0)$ størst? (Angiv en enhedsvektor). I hvilken retning er den retningsafledede i punktet P mindst?

Opgave 6 (9%)

Fladen \mathcal{F} i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = x^2 + \sin(xy) + 4z.$$

- (a) Godtgør, at punktet $P = (2, 0, -1)$ ligger på fladen \mathcal{F} .
- (b) Bestem de partielle afledede $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ og $\frac{\partial F}{\partial z}$.
- (c) Find en ligning for tangentplanen til \mathcal{F} i punktet $P = (2, 0, -1)$.

Opgave 7 (12%)

Lad \mathcal{R} være området i planen bestående af de punkter (x, y) , som opfylder ulighederne

$$0 \leq x, \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

- (a) Skitser området \mathcal{R} .
- (b) Beregn planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{x^2+y^2} dA.$$

Opgave 8 (7%)

Find de komplekse rødder i polynomiet

$$z^2 + (-3 + i)z + 4 - 3i.$$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (10%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

- a. Punktet med rektangulære koordinater $(x, y) = (1, 1)$ kan i polære koordinater angives ved $(r, \theta) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$.

Sand

Falsk

- b. Der gælder at

$$e^{3\pi i} = -3.$$

Sand

Falsk

- c. Funktionen

$$f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$$

antager globalt maksimum i punktet $(0, 0)$.

Sand

Falsk

- d. Der gælder at

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Sand

Falsk

- e. For ethvert reelt tal θ gælder der

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta.$$

Sand

Falsk

Bemærkning. I opgaverne 10 og 11 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 10 (6%)

Lad \mathcal{T} være området i rummet bestående af de punkter (x, y, z) , som opfylder ulighederne

$$-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \quad -y \leq z \leq y.$$

Et legeme med massetætheden (densiteten) $\delta(x, y, z) = 2 - y^2$ dækker netop dette område. Legemets volumen (rumfang) betegnes V , og legemets masse betegnes m . Markér samtlige korrekte formler nedenfor. Bemærk: Du skal **ikke** beregne integralerne.

$V = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-y}^y dz dy dx.$

$V = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{-y}^y dz dx dy.$

$V = \int_{-y}^y \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 dx dy dz.$

$m = \int_{-y}^y \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 (2 - y^2) dx dy dz.$

$m = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-y}^y (2 - y^2) dz dy dx.$

Opgave 11 (6%)

Lad $p(z)$ være et komplekst polynomium af grad 9. Det oplyses, at $p(z)$ har reelle koefficienter. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor.

$p(z)$ vil altid have mindst én reel rod.

$p(z)$ vil altid have mindst to reelle rødder.

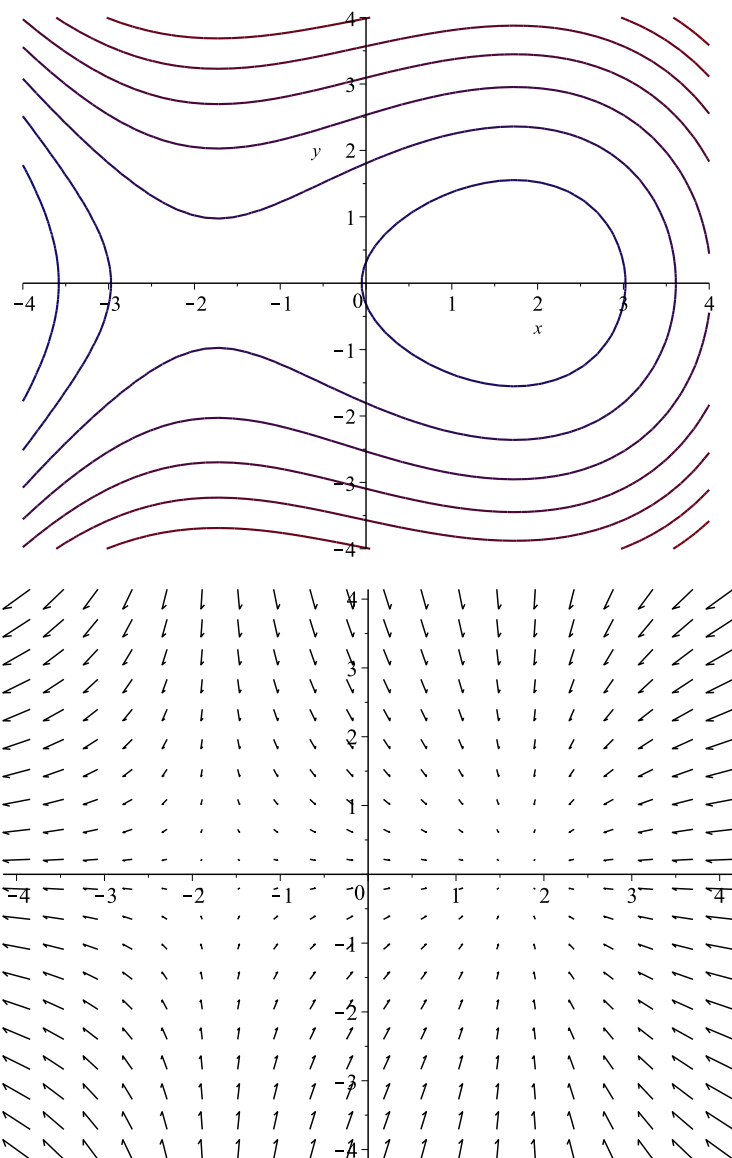
$p(z)$ har præcis 9 rødder regnet med multiplicitet.

Hvis z_0 er en rod i $p(z)$ så er \bar{z}_0 også en rod i $p(z)$.

$p(z)$ vil altid have 9 forskellige rødder.

Opgave 12 (6%)

En differentiabel funktion $f(x, y)$ er defineret for $-4 \leq x \leq 4$ og $-4 \leq y \leq 4$. De to figurer herunder viser udvalgte niveaukurver samt gradientvektorer for funktionen. Der er netop to kritiske punkter med koordinaterne $(-\sqrt{3}, 0)$ og $(\sqrt{3}, 0)$. Afgør typen af hvert kritisk punkt, og markér svaret nedenfor.



a. I punktet $(-\sqrt{3}, 0)$ har f et

- lokalt maksimum
- lokalt minimum
- saddepunkt

b. I punktet $(\sqrt{3}, 0)$ har f et

- lokalt maksimum
- lokalt minimum
- saddepunkt