Facit

Eksamen i Calculus

Tirsdag den 3. juni 2014

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMER: ______________________________

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8%)

En flade $\mathscr{F}$ i rummet er givet ved

$$z = 3 + x^3 + y^2, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Verificer, at punktet $P(1,2,8)$ ligger på $\mathscr{F}$. $8 = 3 + 1^3 + 2^2$ ✓

(b) Bestem en ligning for tangentplanen til $\mathscr{F}$ i punktet $P(1,2,8)$.

$z - 8 = 3(x-1) + 4(y-2) \Rightarrow z = 3x + 4y - 3$

Opgave 2 (7%)

Taylorpolynomiet af 3. grad for $f(x)$ med udviklingspunkt $a = 0$ er givet ved

$$P_3(x) = 2 + x + 4x^2 + 2x^3.$$

Bestem $f(0)$ og $f'''(0)$.

$f(0) = P_3(0) = 2$

$f'''(0) = P_3'''(0) = 12$

Opgave 3 (12%)

(a) Find den fuldstændige (generelle) løsning til differentialligningen

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

$r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = -1$

$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} \cdot t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(b) Det oplyses, at $y(t) = \frac{1}{2}\sin(t)$ er en partikulær løsning til differentialligningen

$$y'' + 2y' + y = \cos(t).$$

Find den fuldstændige (generelle) løsning til differentialligningen

$$y'' + 2y' + y = 2 + \cos(t).$$

$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + 2 + \frac{1}{2}\sin t,$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Opgave 4 (8%)

Find samtlige komplekse rødder i polynomiet

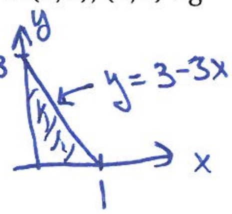
$$p(z) = (z - 3i)(z^2 - 3iz - 2).$$

$z = 3i$ samt rødderne i $z^2 - 3iz - 2$, $D = (-3i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = -1 = (\pm i)^2$

$$z = \frac{3i \pm i}{2} = \begin{cases} i \\ 2i \end{cases}$$

Opgave 5 (12%)

(a) Området $\mathscr{R}$ i xy-planen dækker netop trekanten med hjørnerne $(0,0)$, $(1,0)$ og $(0,3)$. Skitsér $\mathscr{R}$.



(b) Beregn planintegralet af $f(x,y) = x^2$ over området $\mathscr{R}$.

$$\iint_R x^2\,dA = \int_0^1 \int_0^{3-3x} x^2\,dy\,dx = \int_0^1 (3-3x)x^2\,dx$$

$$= \left[x^3 - \frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Opgave 6 (12%)

Betragt funktionen

$$f(x,y,z) = 2z + \sin(z) + x^2y^3, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x,y,z)$. $= (2xy^3, 3x^2y^2, 2+\cos(z))^T$

(b) Funktionen $g(x,y)$ er defineret implicit ved $f(x,y,g(x,y)) = 1$. Bestem $g(1,1)$ og $g_y(1,1)$.

$f(1,1,g(1,1)) = 1 \Rightarrow 2g(1,1) + \sin(g(1,1)) = 0 \Rightarrow g(1,1) = 0.$

$$g_y(1,1) = -\left.\frac{f_y}{f_z}\right|_{(1,1,0)} = -\frac{3}{3} = -1$$

Opgave 7 (5%)

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \log(x^2 + y^2).$$

(a) Bestem definitionsmængden for f. $\{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$.

(b) Bestem den blandede partielle afledede $f_{xy}(x,y)$.

$$f_{xy} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Opgave 8 (8%)

Betragt den plane kurve givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + 2\sin(t)\,\mathbf{j} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{bmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi).$$

Bestem $\mathbf{r}(\pi/4)$ og udregn kurvens krumning i $\mathbf{r}(\pi/4)$.

$$\bar{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$$K = \frac{2}{(1+3\cos^2 t)^{3/2}} \Rightarrow K\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}$$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (10%).

Besvar følgende 6 sand/falsk opgaver:

a. Der gælder, at

$$\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$$

for *alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.

☒ Sand ☐ Falsk

b. En kontinuert differentiabel funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ med et lokalt minimum i punktet $P \in \mathbb{R}^2$ opfylder $\nabla f(P) = \mathbf{0}$.

☒ Sand ☐ Falsk

c. For et komplekst tal $z \neq 0$ gælder, at

$$\frac{z}{|z|} = \overline{z}.$$

☐ Sand ☒ Falsk

d. Følgende ligning gælder for den inverse sinus funktion:

$$\sin(\arcsin(x)) = x, \qquad \text{for alle } x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

☐ Sand ☒ Falsk

e. For $f(t) = e^{(1+2i)t}$, hvor $t \in \mathbb{R}$, gælder at

$$f'(t) = (1+i)e^{(1+2i)t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

☐ Sand ☒ Falsk

f. Der gælder, at

$$\frac{d}{dx}\arctan(x^2) = \frac{2x}{1+x^4}$$

for *alle* $x \in \mathbb{R}$.

☒ Sand ☐ Falsk

Bemærkning. I opgaverne 10–12 evalueres der efter følgende princip: hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning. Man får derfor *intet* ud af "helgarderinger".

Opgave 10 (6%)

Et legeme T dækker præcis det simple området i rummet givet ved

$$\{(x, y, z): \quad (x, z) \in \mathscr{R}, 0 \leq y \leq 3(1 - x/2 - z)\},$$

hvor

$$\mathscr{R} = \{(x, z): \quad 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 2(1 - z)\}.$$

Massetætheden (densiteten) for T er $\delta(x, y, z) = 1 + z^3$. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor (bemærk: integralerne skal **ikke** evalueres).

☒ T's masse kan udregnes som følger: $m = \int_0^1 \int_0^{2(1-z)} \int_0^{3(1-x/2-z)} (1 + z^3)\, dydxdz$

☐ T's volumen kan udregnes som følger: $V = \int_0^1 \int_0^{2(1-z)} \int_0^{3(1-x/2-z)} dzdxdy$

☐ T's masse kan udregnes som følger: $m = \int_0^{2(1-z)} \int_0^1 \int_0^{3(1-x/2-z)} (1 + z^3)\, dxdydz$

☒ T's volumen kan udregnes som følger: $V = \int_0^1 \int_0^{2(1-z)} \int_0^{3(1-x/2-z)} dydxdz$

☐ T's masse kan udregnes som følger: $m = \int_0^1 \int_0^{2(1-z)} \int_0^{3(1-x/2-z)} (1 + z^3)\, dydzdx.$

Opgave 11 (5%)

Lad $p(z)$ være et komplekst polynomium af grad 5. Det oplyses, at $p(z)$ har reelle koefficienter. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor.

☐ $p(z)$ har altid 5 forskellige komplekse rødder

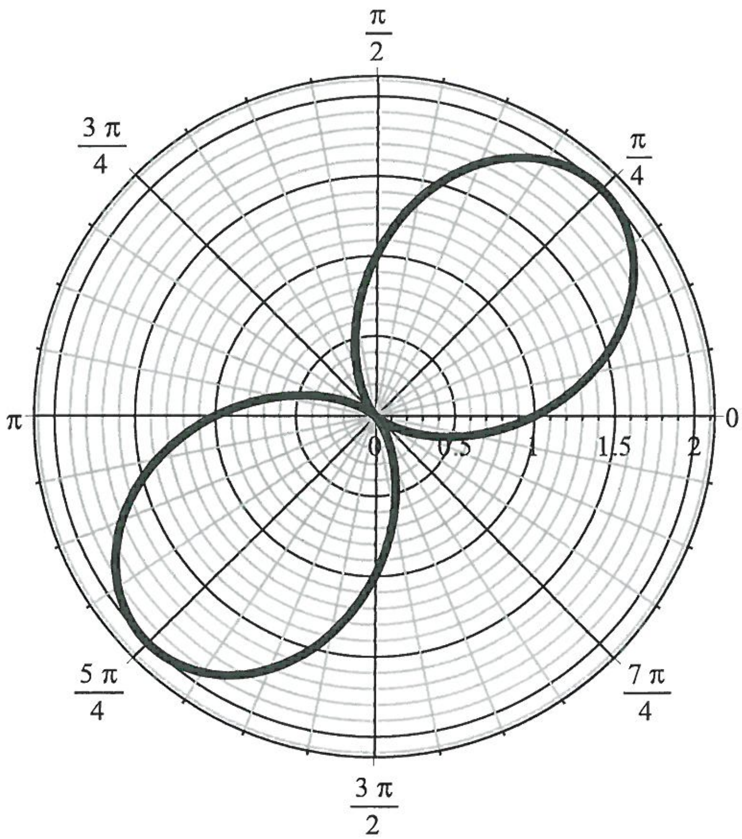
☒ $p(z)$ har altid mindst én reel rod

☒ $p(z)$ har 5 komplekse rødder regnet med multiplicitet

☐ $p(z)$ har altid mindst én rod på den imaginære akse.

Opgave 12 (7%)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen $r = f(\theta)$ afbildet i polære koordinater.



Hvilken (hvilke) af nedenstående forskrifter for f, samt tilhørende definitionsmængde for θ, svarer til ovenstående figur.

☐ $f(\theta) = 2 + \cos(4\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

☐ $f(\theta) = 2 - \cos(2\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi$

☐ $f(\theta) = 1 + \cos(3\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

☒ $f(\theta) = 1 + \sin(2\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

☐ $f(\theta) = 2 + \sin(2\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

☐ $f(\theta) = \cos(2\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi.$