Eksamen i Calculus

Mandag den 4. juni 2012

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLD NUMMER:
- ☐ Hold 1 (v. Jacob Broe)
- ☐ Hold 2 (v. Morten Nielsen og Mikkel Brynildsen)
- ☐ Hold 4 (v. Bo Rosbjerg)

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8%)

En flade $\mathscr{F}$ er givet implicit som løsningsmængden til ligningen

$$F(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^4 - 3 = 0.$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla F(x,y,z)$.

(b) Bestem en ligning for tangentplanen til $\mathscr{F}$ gennem punktet $(1,-1,-1)$.

Opgave 2 (16%)

(a) Find den entydigt bestemte løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0,$$

som opfylder, at

$$y(0) = 0 \quad \text{og} \quad y'(0) = 3.$$

(b) Find en partikulær løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 1.$$

(c) Det oplyses, at

$$y_p(x) = \cos x - 3\sin x$$

er en partikulær løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 10\sin x.$$

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 1 + 30\sin x.$$

Opgave 3 (8%)

Løs den komplekse andengradsligning

$$z^2 + (1+i)z + 2 - i = 0.$$

Opgave 4 (9%)

(a) Området $\mathscr{R}$ i xy-planen dækker netop trekanten med hjørnerne $(-1,1)$, $(0,0)$ og $(1,1)$. Skitsér $\mathscr{R}$.

(b) Find plantintegralet af $f(x,y) = 3y$ over området $\mathscr{R}$.

Opgave 5 (7%)

(a) Angiv Taylorpolynomiet af 2. grad for

$$f(x) = 1 + 4x + 8x^2 + 12x^3,$$

med udviklingspunkt $a = 0$.

(b) Det oplyses, at den 6 gange kontinuert differentiable funktion $g(x)$ har følgende Taylorpolynomium af 2. grad

$$P_2(x) = 1 + 2(x-1) + 4(x-1)^2$$

med udviklingspunktet $a = 1$. Angiv $g''(1)$.

Opgave 6 (10%)

En tynd plade dækker netop området

$$\mathscr{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0\}$$

i xy-planen. Pladen har massetæthed (densitet) $\delta(x, y) = x$.

(a) Bestem pladens masse.

Lad $(\bar{x}, \bar{y})$ betegne pladens massemidtpunkt. En udregning viser, at $\bar{x} = \frac{45\pi}{112}$.

(b) Beregn $\bar{y}$.

Opgave 7 (5%)

Betragt funktionen

$$f(x, y) = \arctan(x^2 + y^3).$$

(a) Bestem definitionsmængden for f.

(b) Bestem de partielle afledede $f_x(x, y)$ og $f_y(x, y)$.

Opgave 8 (5%)

Betragt den plane kurve givet ved

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= \sin t, \end{aligned}$$

hvor $t \in \mathbb{R}$. Beregn kurvens krumningen $\kappa(t)$ for $t = \frac{3\pi}{4}$.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Bemærkning. I opgaverne 9–12 evalueres der efter følgende princip: hver forkert afkrydsning ophæver én rigtigt afkrydsning. Man får derfor *intet* ud af "helgarderinger".

Opgave 9 (6%)

Et legeme T dækker det område i rummet som i sfæriske koordinater er givet ved

$$\{(\rho,\phi,\theta):\quad 0\le\phi\le\pi/6,\quad 0\le\rho\le\pi/8\}.$$

Massetætheden (densiteten) for T er $\delta(x,y,z)=y^2$. Hvilke(t) af nedenstående 4 itererede integraler kan benyttes til at bestemme T's masse (bemærk: værdierne af integralerne skal *ikke* udregnes.)

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/8}\rho^3\sin\theta\sin^2\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/8}\rho^3\sin\theta\sin^2\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/8}\rho^4\sin^2\theta\sin^3\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/8}\rho^4\sin^3\theta\sin^2\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$

Opgave 10 (5%)

Betragt to komplekse tal $c_1=a_1+ib_1$ og $c_2=a_2+ib_2$, hvor $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor.

☐ $c_1c_2=a_1a_2+b_1b_2+i(a_1b_1+b_1a_2)$.

☐ $c_1=\overline{c_1}$, hvis og kun hvis, $a_1=0$.

☐ $\dfrac{c_1}{c_2}$ er defineret hvis $a_2^2+b_2^2>0$.

☐ Ligningen i z givet ved $z^2+c_1=z-c_2$ har præcis to komplekse løsninger regnet med multiplicitet.

Opgave 11 (14%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

a. Betragt en kontinuert funktion f defineret på et område $\mathscr{R}$ i planen, hvor $\mathscr{R}$ er givet i polære koordinater ved

$$\mathscr{R} = \{(r,\theta)_{\text{pol}} : r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta\},$$

hvor r_1 og r_2 er kontinuerte funktioner og $\alpha \le \beta$ er konstanter. Det tilhørende planintegral kan evalueres som følgende itererede integral

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r\,dr\,d\theta.$$

☐ Sand ☐ Falsk

b. En kontinuert funktion defineret på et område $\mathscr{R}$ i xy-planen, hvor $\mathscr{R}$ består af punkterne på og indenfor en simpel lukket kurve, har altid et globalt minimum på $\mathscr{R}$.

☐ Sand ☐ Falsk

c. Betragt en differentiabel funktion $f(x,y)$ defineret på $\mathbb{R}^2$. Hvis alle retningsafledede for f i punktet $(0,0)$ antager værdien 0, da har f et lokalt maksimum i $(0,0)$.

☐ Sand ☐ Falsk

d. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaldes injektiv (one-to-one) hvis $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ for $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

☐ Sand ☐ Falsk

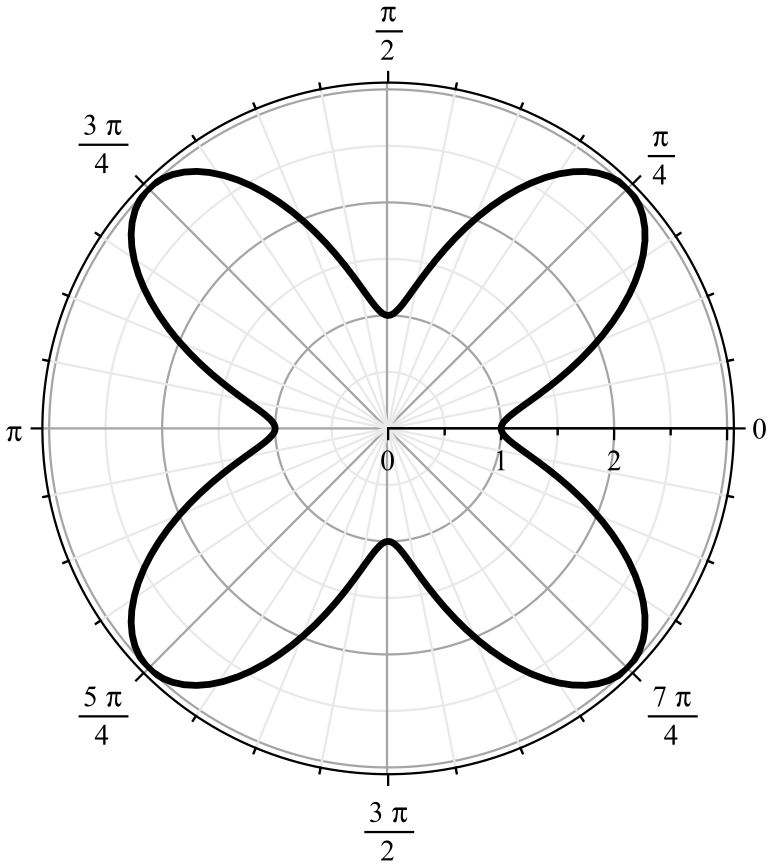
e. Der gælder, at

$$\frac{d}{dx}\big(\arcsin x + \arccos x\big) = 0, \qquad x \in (-1,1).$$

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 12 (7%)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen $r = f(\theta)$ afbildet i polære koordinater.



Hvilken (hvilke) af nedenstående forskrifter for f, samt tilhørende definitionsmænge for θ, svarer til ovenstående figur.

- [ ] $f(\theta) = 1 + \cos(4\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$
- [ ] $f(\theta) = 2 - \cos(2\theta),\ 0 \le \theta \le \pi$
- [ ] $f(\theta) = 2 + \sin(4\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$
- [ ] $f(\theta) = 2 - \cos(4\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$
- [ ] $f(\theta) = 1 + 2\cos(2\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$
- [ ] $f(\theta) = 1 + \cos(2\theta),\ 0 \le \theta \le \pi.$