

Reeksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design,
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

20. februar 2019

Dette eksamenssæt består af 8 nummererede sider med 12 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

I hver delopgave skal der **kun afkrydses én svarmulighed**. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger.

Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder. Du bedes også afkrydse det hold som du deltager i.

Held og lykke!

NAVN: _____

STUDIENUMMER: _____

- Hold 1: MAT, MATTEK, MATØK, EGI, FYS, NANO N.H. Nielsen
- Hold 2: BIO, KEMI, KEMT, MILT, BIOT J.E. Johnsen
- Hold 3: BA, MP J. Broe
- Hold 4: GBE, EGF J. E.S. Ottosen

Opgave 1 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x, y) = 1 + \frac{y^2}{x^2}$$

for reelle variable x og y .

(a) (3 point) Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x, y) der opfylder

- | | | |
|-------------------------------------|--|--------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $x < 0$ | <input type="checkbox"/> $x \neq 0$ | <input type="checkbox"/> $yx \neq 0$ |
| <input type="checkbox"/> $y \neq 0$ | <input type="checkbox"/> $x \neq 0$ og $y > 0$ | <input type="checkbox"/> $y^2 = x^2$ |

(b) (3 point) Hvad er niveaukurven $f(x, y) = 2$?

- En parabel $x = y^2 + 1$
- En parabel $x = y^2 - 1$
- En cirkel med centrum i origo og radius 1
- En cirkel med centrum i origo og radius 2
- To rette linjer $x = \pm y$ uden origo.

Opgave 2 (6 point)

En parametrisk kurve i rummet er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \langle t, -t^2, e^t \rangle$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (3 point) Hvad er kurvens fart?

- | | | |
|--|---|---|
| <input type="checkbox"/> $\langle 1, -2t, e^t \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{5 + e}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{1 + 4t^2 + e^{2t}}$ |
| <input type="checkbox"/> $\sqrt{1 - 2t + e^t}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{4 + t^2}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{1 - 4t^2 + e^{2t}}$ |

(b) (3 point) Hvilken af de følgende vektorer er kurvens accelerationsvektor for $t = 0$?

- | | | |
|---|---|---|
| <input type="checkbox"/> $\langle 0, -1, 0 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 0, -2, 0 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 0, -2, 1 \rangle$ |
| <input type="checkbox"/> $\langle 0, -4, 0 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle -4, 0, 1 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 0, -2, e \rangle$ |

Opgave 3 (6 point)

Tre komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 1 - i, \quad z_2 = 2i^2 \quad \text{og} \quad z_3 = 1 + i.$$

(a) (3 point) Hvad er $z_1 + z_2$ på polær form?

- | | | |
|--|--|--|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> $-2e^{i\pi/4}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ |
| <input type="checkbox"/> $2e^{i\pi/4}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{2}e^{i\pi/2}$ |

(b) (3 point) Hvad er $\frac{z_1}{z_3}$ på standard form?

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> i | <input type="checkbox"/> $-2i$ |
| <input type="checkbox"/> $-i$ | <input type="checkbox"/> $2i$ | <input type="checkbox"/> $i/2$ |

Opgave 4 (10 point)

(a) (5 point) En homogen anden ordens differentiaalligning er givet ved

$$y'' = 2y'.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk hvori c_1 og c_2 er arbitrære reelle konstanter. Markér det udtryk som udgør den fuldstændige løsning til differentiaalligningen.

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^t$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1e^{2t} + c_2$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 + c_2t$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1t^2 + c_2t$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 + c_2t^2$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 + c_2e^t$ |

(b) (5 point) Markér løsningen $x(t)$ til den inhomogene differentiaalligning

$$x''(t) = 2x'(t) + 1, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

blandt følgende funktionsudtryk.

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $x(t) = t^2$ | <input type="checkbox"/> $x(t) = -\frac{t}{2} + \frac{1}{4}(e^{2t} - 1)$ |
| <input type="checkbox"/> $x(t) = -4t^2 + 1$ | <input type="checkbox"/> $x(t) = t - e^{2t}$ |
| <input type="checkbox"/> $x(t) = t - te^{2t}$ | <input type="checkbox"/> $x(t) = t - \sin(2t)$ |
| <input type="checkbox"/> $x(t) = e^{2t} - 1 + t^2 - \frac{t}{2}$ | <input type="checkbox"/> $x(t) = t - \cos(2t)$ |

Opgave 5 (8 point)

Markér om de følgende udsagn er sandt eller falsk.

- (a) (2 point) Hastighedsvektoren og enhedstangentvektoren til en kurve har altid den samme længde.

Sandt

Falsk

- (b) (2 point) Når et punkt bevæger sig på en cirkel, så er krumningen konstant.

Sandt

Falsk

- (c) (2 point) Produktet af to reelle funktioner som er differentiable i et punkt er differentiable i det punkt.

Sandt

Falsk

- (d) (2 point) Funktionen $f(x) = \sin(x)$ hvor $0 \leq x \leq 2\pi$ har en invers funktion.

Sandt

Falsk

Opgave 6 (7 point)

Et område \mathcal{R} i planen kan repræsenteres ved hjælp af ulighederne $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ og $x \leq y$.

- (a) (3 point) Hvilken af de følgende uligheder viser, at et punkt med koordinater $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ tilhører \mathcal{R} ?

$r \geq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

$4 \leq r \leq 9, \quad \theta = \pi/2$

$4 \leq r \leq 9, \quad \pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4$

$r \leq 9$

$2 \leq r \leq 3, \quad \pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4$

$2 \leq r \leq 3$

- (b) (4 point) Hvad er områdets areal?

$\pi/2$

$3\pi/2$

$5\pi/2$

π

2π

3π

Opgave 7 (8 point)

Et område \mathcal{R} i planen består af alle punkterne med koordinater (x, y) som opfylder

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2.$$

Funktionen f er defineret på \mathcal{R} og givet ved $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

(a) (4 point) Hvilket af de følgende punkter er et indre kritisk punkt for f ?

$\langle 0, 1 \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle$

$\langle 1, -1 \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle$

$\langle -1, -1 \rangle$

(b) (4 point) Hvad er den maksimale værdi af f ?

2

6

10

4

8

12

Opgave 8 (12 point)

En flade \mathcal{F} i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$$

(a) (6 point) Hvilken af de følgende ligninger udgør tangentplanen til \mathcal{F} i punktet $P = (1, 1, 1)$?

$3 = x + y + z$

$z = -x + 2y$

$z = 1$

$2z = x + y$

$z = -y + 2x$

$0 = 3x + 2y - 5z$

(b) (6 point) Fra ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvad er den partielle afledede $\partial z / \partial y$ i punktet P ?

-1

$-1/2$

$3/5$

0

$1/2$

4

Opgave 9 (12 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \ln(e^x + y),$$

hvor $x > -1$ og $y > 0$.

- (a) (2 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: $f(x, y)$ kan ikke blive mindre end nul.

Sandt

Falsk

- (b) (2 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: $f(x, y)$ er altid mindre end 100.

Sandt

Falsk

- (c) (4 point) Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (0, 1)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \langle 1, 0 \rangle$?

1

3

4

2

$\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}$

- (d) (4 point) Hvilken af de følgende enhedsvektorer peger i den retning hvor f vokser hurtigst i punktet P (retningen \mathbf{v} hvor $D_{\mathbf{v}}f(P)$ er størst)?

$\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$

$\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$

$\langle 0, -1 \rangle$

$\langle -1, 0 \rangle$

$\langle \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \rangle$

$\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$

$\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle$

$\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$

Opgave 10 (9 point)

En funktion er givet ved

$$f(x) = x^2 + \sin(2x)$$

for alle reelle tal x .

- (a) (5 point) Markér det korrekte udtryk for $f'''(x)$ (dvs f tre gange differenteret)

- $\cos(2x)$ $8 \cos(2x)$ $8 \sin(2x)$
 $-2 \cos(2x)$ $-8 \cos(2x)$ $-8 \sin(2x)$

- (b) (4 point) Hvilket af de følgende udtryk er tredje ordens Taylor polynomiet for f med udviklingspunkt $x = 0$?

- $1 + x + x^2 + x^3$ $-x + x^2 - x^3/6$ $2x + x^2$
 $1 + x^2/2 + x^3/6$ $2x + x^2 - 4x^3/3$ $2x + x^2 - 4x^3$

Opgave 11 (11 point)

En kurve i planen er givet ved

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(2t), \\y(t) &= \sin(t)\end{aligned}$$

for alle reelle tal t .

- (a) (2 point) For hvilken positiv værdi af parameteren t vender kurven tilbage til punktet $P = (1,0)$ for første gang? (Bemærk, at kurven er i P når $t = 0$.)

- $\pi/8$ $\pi/4$ $\pi/2$ π 2π

- (b) (5 point) Hvad er kurvens krumning i P ?

- 1 2 3 4 5

- (c) (4 point) Hvad er værdien af farten når $t = \pi$?

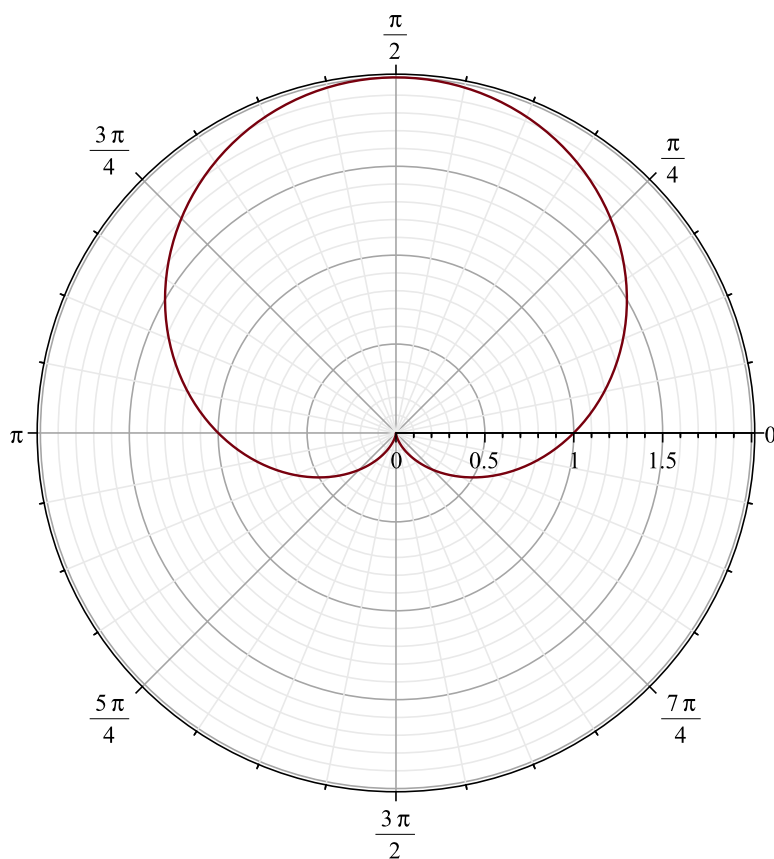
- 0 2 4
 1 3 5

Opgave 12 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for en funktion

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

afbildet i polære koordinater. Grafen repræsenterer en kardioid.



En af forskrifterne for f i listen nedenfor svarer til figuren. Hvilken?

$f(\theta) = 1 + \sin(2\theta)$

$f(\theta) = \sin^2(\theta) - \cos(\theta)$

$f(\theta) = 1 - \cos(\theta)$

$f(\theta) = \cos(\theta) \sin(\theta)$

$f(\theta) = 1 + 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$f(\theta) = \frac{2 - \sin(\theta)}{2}$