

To find the English version of the exam, please read from the other end!

Se venligst bort fra den engelske version på bagsiden hvis du følger denne danske version af prøven.

Eksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design,
det Sundhedsvidenskabelig Fakultet samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

22. august 2017, 9:00 – 13:00

Dette eksamenssæt består af 8 nummererede sider med 12 afkrydningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point.

Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv.

Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i dette opgavesæt.

Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger.

Opgaverne 6(a), 9 og 11(c) kan have mere end et korrekt resultat.

Disse opgaver evalueres efter følgende princip:

Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

Du bedes også afkrydse det hold som du deltager i.

Held og lykke!

NAVN: _____

STUDIENUMMER: _____

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|----------------------|
| <input type="checkbox"/> | Hold 1: LAND – ST | Horia Cornean |
| <input type="checkbox"/> | Hold 3: MAT – MAOK – MATTEK | Nikolaj Hess-Nielsen |
| <input type="checkbox"/> | Hold L (København) | Iver Ottosen |
| <input type="checkbox"/> | Hold BBT (København) | Bedia Møller |

Facit

Opgave 1 (8 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x) = e^{(x^2)}$$

for en reel parameter x .

(a) (4 point) Hvilken af de følgende funktioner stemmer overens med den dobbelt afledede $f''(x)$?

- $2e^{(x^2)}$ $(2 + 4x^2)e^{(x^2)}$ $2xe^{2x}$
 $4x^2e^{(x^2)}$ e^2 $e^{(x^2)}$

(b) (4 point) Et af de følgende polynomier er anden ordens Taylor polynomiet for funktionen f med udviklingspunkt $x = 1$. Hvilket?

- $2e(x - 1) + 3e(x - 1)^2$ $e + 2e(x - 1) + 3e(x - 1)^2$
 $e + 2ex + 3ex^2$ $e + 2e(x - 1) + 6e(x - 1)^2$

Opgave 2 (8 point)

En kurve i planen er givet ved

$$\begin{aligned}x &= t^2, \\y &= 2t^3,\end{aligned}$$

hvor parameteren t gennemløber de positive reelle tal.

(a) (2 point) For hvilken værdi af parameteren t går kurven gennem punktet $P = (1, 2)$?

- -1 0 1 2

(b) (2 point) Hvilken af de følgende vektorer er kurvens hastighedsvektor i P ?

- $\begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -12 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) (4 point) Hvilket af de følgende tal er lig med kurvens krumningsradius $\rho(P) = \frac{1}{\kappa(P)}$ i P ?

- $\frac{3\sqrt{10}}{200}$ $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ 0
 $\frac{20\sqrt{10}}{3}$ $2\sqrt{37}$ intet af dem

Opgave 3 (6 point)

En kurve i rummet er givet ved

$$\begin{aligned}x &= t, \\y &= \frac{\sqrt{6}}{2} t^2, \\z &= t^3,\end{aligned}$$

hvor parameteren t gennemløber de positive reelle tal.

(a) (3 point) Markér det korrekte udtryk for farten $v(t)$.

- $1 + 3t^2$ $1 + \sqrt{6}t + 3t^2$
 $\sqrt{1 + 3t^2 + 9t^4}$ $1 + 6t^2 + 9t^4$

(b) (3 point) Hvad er buelængden af kurven fra $t = 1$ til $t = 2$?

- $4\frac{4}{5}$ 2 -1 8 10

Opgave 4 (8 point)

En funktion f er defineret i første kvadrant ($x > 0, y > 0$) ved

$$f(x, y) = x + 8y + \frac{1}{xy}.$$

Det oplyses at grafen for funktionen danner en opadgående skål – værdierne går mod ∞ når x eller y nærmer sig 0 eller vokser ud over alle grænser.

(a) (4 point) Et af de følgende er et kritisk punkt for funktionen f . Hvilket?

- $(0, 0)$ $(\frac{1}{2}, 4)$ $(1, 1)$
 $(2, \frac{1}{4})$ $(-2, -\frac{1}{4})$ $(\frac{1}{4}, 2)$

(b) (4 point) Marker den af de følgende påstande som er sand:

- Det kritiske punkt er et sadelpunkt for funktionen.
 Funktionen antager værdien 6 i det kritiske punkt. Denne værdi er det globale minimum for funktionen.
 Funktionen antager værdien 33 i det kritiske punkt. Denne værdi er det globale minimum for funktionen.
 Funktionen antager værdien 6 i det kritiske punkt. Denne værdi er det globale maksimum for funktionen.
 Funktionen antager værdien 6 i det kritiske punkt. Der er tale om et lokalt, men ikke et globalt minimum.

Opgave 5 (7 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2}.$$

- (a) (2 point) Funktionen f har en definitions­mængde. Afkryds hvis den består af samtlige punkter i planen *fraregnet*

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> Origo | <input checked="" type="checkbox"/> y -aksen |
| <input type="checkbox"/> diagonalen $y = x$ | <input type="checkbox"/> parablen $y = x^2$ |
| <input type="checkbox"/> x -aksen | |

- (b) (3 point) Hvilken af de følgende beskrivelser svarer til niveaukurven med ligningen $f(x, y) = 2$?

- En ret linje med hældning 2 gennem Origo.
- En parabel gennem Origo der vender grenene opad.
- En parabel der vender grenene opad – fraregnet toppunktet i Origo.
- En parabel der vender grenene nedad – fraregnet toppunktet i Origo.
- En cirkel med radius 1 og centrum i Origo.

- (c) (2 point) Hvad svarer niveaukurven $f(x, y) = 0$ til?

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> en ellipse | <input type="checkbox"/> y -aksen |
| <input type="checkbox"/> x -aksen | <input type="checkbox"/> y -aksen fraregnet Origo |
| <input checked="" type="checkbox"/> x -aksen fraregnet Origo | <input type="checkbox"/> den tomme mængde |

Opgave 6 (8 point)

Et rumligt legeme L afgrænses af trekanten i XY -planen givet ved $x \leq 0, y \geq 0$ og $y \leq x + 1$ samt fladen givet ved $z = 1 - x^2 - y^2$.

- (a) (4 point) Hvilke af de følgende integraludtryk beregner legemets rumfang/volumen?

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $\int_{-1}^0 (1 - x^2 - y^2) dy dx$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\int_0^1 \int_{y-1}^0 (1 - x^2 - y^2) dx dy$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $\int_{-1}^0 \int_0^{1+x} (1 - x^2 - y^2) dy dx$ | <input type="checkbox"/> $\int_0^1 \int_0^{1+x} (1 - x^2 - y^2) dy dx$ |

- (b) (4 point) Hvad er legemets rumfang/volumen?

- | | | |
|----------------------------|---|---|
| <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{1}{3}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{24}$ |
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{6}$ | <input type="checkbox"/> $-\frac{1}{3}$ |

Opgave 7 (8 point)

Et rumligt legeme T har form af et tetraeder afgrænset af fire planer; det er givet ved $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ og $x + y + z \leq 1$ og har en massetæthed (densitet) $\delta(x, y, z) = x$. Hvilket af de følgende tal svarer til massen af legemet T ?

- | | | |
|--|--|--|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{8}$ | <input type="checkbox"/> $-\frac{1}{24}$ |
| <input type="checkbox"/> $\frac{1}{3}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{1}{24}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{48}$ |

Opgave 8 (14 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \ln(y - x^2).$$

(a) (2 point) Funktionen f har en definitions­mængde. Afkryds hvis den består af samtlige punkter (x, y) for hvilke

- | | |
|---------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> $y < x^2$ | <input checked="" type="checkbox"/> $y > x^2$ |
| <input type="checkbox"/> $y \geq x^2$ | <input type="checkbox"/> $(x, y) \neq (0, 0)$ |

(b) (3 point) Hvilken af følgende udtryk svarer til den anden ordens partielle afledede $f_{xy}(x, y)$?

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $-2x \ln(y - x^2)$ | <input type="checkbox"/> $-2x$ |
| <input type="checkbox"/> $\frac{-1}{(y-x^2)^2}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{2x}{(y-x^2)^2}$ |

(c) (3 point) Hvilken af de følgende vektorer svarer til funktionens gradient ∇f i punktet $P = (1, 2)$?

- | | |
|---|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ | <input type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ |
| <input type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ | <input type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ |

(d) (3 point) Hvilket af de følgende tal er lig med den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (1, 2)$ og retningen bestemt ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = 0.8\mathbf{i} - 0.6\mathbf{j} = (0.8, -0.6)$?

- | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|--|----------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 0 | <input checked="" type="checkbox"/> -2.2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> -1 |
|----------------------------|----------------------------|--|----------------------------|-----------------------------|

(e) (3 point) Hvilken af de følgende ligninger beskriver tangentplanen til grafen for funktionen f i punktet $Q = (1, 2, 0)$?

- | | |
|---|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> $z = -2x + y$ | <input type="checkbox"/> $z = -2(x - 2) + y - 1$ |
| <input type="checkbox"/> $z = -2x + y + \ln(4)$ | <input type="checkbox"/> ingen af dem |

Opgave 9 (10 point)

En flade \mathcal{F} i rummet er bestemt ved ligningen

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

(a) (2 point) Hvilke af de følgende punkter ligger på fladen \mathcal{F} ?

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $(1, 0)$ | <input type="checkbox"/> $(2, 2, -3)$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $(1, 0, 0)$ | <input type="checkbox"/> $(3, 4, 5)$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $(1, 1, 1)$ | <input type="checkbox"/> $(-1, -1, 0)$ |

(b) (2 point) Hvilke af de følgende vektorer er normale til/står vinkelret på \mathcal{F} s tangentplan i $P = (1, 1, -1)$?

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | <input type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ |

(c) (2 point) Hvilke af de følgende punkter er indeholdt i \mathcal{F} s tangentplan i $P = (1, 1, -1)$?

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $(1, 1, 0)$ | <input type="checkbox"/> $(2, 2, 3)$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $(1, 0, 0)$ | <input checked="" type="checkbox"/> $(2, 2, -3)$ |

(d) (4 point) I hvilke af de følgende punkter Q på fladen \mathcal{F} er tangentplanen til fladen \mathcal{F} i punktet Q parallel med planen $z = x + y$?

- | | |
|---|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> $Q = (1, 1, 1)$ | <input type="checkbox"/> $Q = (0, 0, 1)$ |
| <input type="checkbox"/> $Q = (1, 1, -1)$ | <input checked="" type="checkbox"/> $Q = (-1, -1, -1)$ |
| <input type="checkbox"/> $Q = (1, 0, 0)$ | <input type="checkbox"/> $Q = (-1, 1, 1)$ |

Opgave 10 (8 point)

Et komplekst tal z har polær form $\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$.

(a) (2 point) Hvad er z på standard form?

- $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ i $1 + i$ ingen af dem

(b) (2 point) Hvad er $z\bar{z}$ på polær form?

- 2 $2e^{\pi i}$ $\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{2}}$ ingen af dem

(c) (2 point) Hvad er $\frac{\bar{z}}{z}$ på standard form?

- i $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ $-i$ ingen af dem

(d) (2 point) Hvad er $\frac{\bar{z}}{z}$ på polær form?

- $e^{\frac{\pi i}{2}}$ $2e^{\frac{3\pi i}{4}}$ $e^{\frac{3\pi i}{2}}$ ingen af dem

Opgave 11 (9 point)

En homogen anden ordens differentiaalligning er givet ved

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

(a) (3 point) I den efterfølgende liste findes en række funktionsudtryk hvori der indgår arbitrære konstanter c_1 og c_2 . Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentiaalligningen.

- $y(t) = c_1e^{3t}\cos(t) + c_2e^{3t}\sin(t)$ $y(t) = c_1e^{3t}\cos(t^2) - c_2e^{3t}\sin(t^2)$
 $y(t) = c_1e^t + c_2e^{9t}$ $y(t) = c_1t^3 + c_2t^{-3}$
 $y(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t}$ $y(t) = c_1e^{3t}\cos(2t) + c_2e^{3t}\sin(2t)$

(b) (3 point) Differentiaalligningen har netop en løsning $y(t)$ med begyndelsesværdier $y(1) = 3e^3$, $y'(1) = 10e^3$. Markér funktionsværdien $y(0)$.

- 6 2 0 ingen af disse

(c) (3 point) Hvilke af de følgende funktionsudtryk udgør en (partikulær) løsning til den inhomogene differentiaalligning

$$y'' - 6y' + 9y = 9t + 3?$$

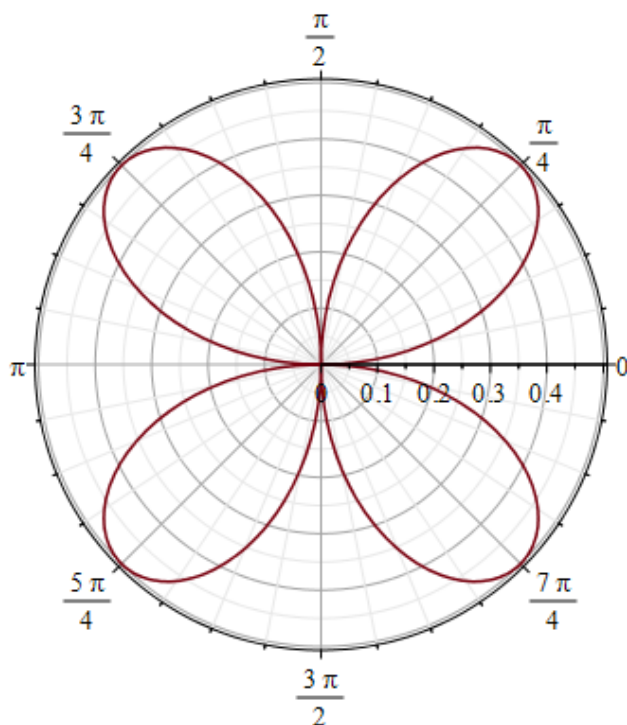
- $t + 1$ $e^{3t} + t + 1$
 $t^2 + \frac{t}{2} - 1$ $-2te^{3t} + t + 1$
 $9t + \frac{17}{3}$ $e^{3t} - te^{3t}$

Opgave 12 (6 point)

Figuren nedenfor viser grafen for en funktion

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



En af forskrifterne for f i listen nedenfor svarer til figuren. Hvilken?

$f(\theta) = \sin(\theta)$

$f(\theta) = (\sin(\theta))^2$

$f(\theta) = (\cos(\theta))^2$

$f(\theta) = \sin(2\theta)$

$f(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2}$

$f(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{2}$