

Reeksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

21. februar 2018

Dette eksamenssæt består af 8 nummererede sider med 12 afkrydningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger. Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

Held og lykke!

NAVN: _____

STUDIENUMMER: _____

Opgave 1 (13 point)

(a) (5 point). En anden ordens differentiaalligning er givet ved

$$y'' - 10y' + 25y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk, hvori c_1 og c_2 er arbitrære konstanter. Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentiaalligningen.

- $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t$
- $y(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{2t}$
- $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{5t}$
- $y(t) = c_1 e^{5t} + c_2 t e^{5t}$
- $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$
- $y(t) = c_1 e^{2t} \cos(5t) + c_2 e^{2t} \sin(5t)$
- $y(t) = c_1 e^t \cos(6t) + c_2 e^t \sin(6t)$
- $y(t) = c_1 e^{2t} \cos(3t) + c_2 e^{2t} \sin(3t)$

(b) (4 point). Markér løsningen til begyndelsesværdiproblemet

$$y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7$$

blandt følgende muligheder:

- $y(t) = -\frac{5}{4}e^{-3t} + \frac{13}{4}c_2 e^t$
- $y(t) = 2e^{2t} + 3te^{2t}$
- $y(t) = 3e^{-5t} - c_2 e^{2t}$
- $y(t) = 2e^{2t} \cos(5t) + 3e^{2t} \sin(5t)$
- $y(t) = -\frac{1}{4}e^t + \frac{5}{4}e^{5t}$
- $y(t) = 2e^t \cos(6t) + 4e^t \sin(6t)$
- $y(t) = 2e^{5t} - 3te^{5t}$
- $y(t) = e^{2t} \cos(3t) + e^{2t} \sin(3t)$

(c) (4 point). Betragt den inhomogene differentiaalligning

$$y'' - 10y' + 25y = 5t + 3.$$

Hvilken af følgende funktioner er en partikulær løsning til denne ligning?

- $\frac{5}{2}t + \frac{3}{2}$
- $t - 1$
- $t^2 - 5t - 2$
- $2e^t$
- $\frac{1}{5}t + \frac{1}{5}$
- $5t - 1$
- $2t^2 - t + 1$
- $3t - 4$

Opgave 2 (7 point)

En plan kurve er givet ved

$$\begin{aligned}x &= t - e^t, \\y &= t + e^t,\end{aligned}$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

- (a) (3 point). Punktet $P = (-1, 1)$ ligger på kurven. Hvilken værdi af parameteren t svarer til dette punkt?

- | | | | |
|------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> -2 | <input type="checkbox"/> -1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 3 |
| <input type="checkbox"/> $-\ln(2)$ | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> $\ln(2)$ | <input type="checkbox"/> $\frac{7}{2}$ |

- (b) (4 point). Hvad er kurvens krumning for $t = 0$?

- | | | | |
|---|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> $\frac{5}{4}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{5}$ | <input type="checkbox"/> 8 |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\sqrt{2}}{4}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{5}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{5}{3}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}$ |

Opgave 3 (8 point)

En kurve i rummet er givet ved

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}t, \\y &= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, \\z &= \frac{1}{2}t^2,\end{aligned}$$

hvor parameteren t gennemløber de positive reelle tal.

- (a) (3 point). Hvad er den afledede y' ?

- | | | | |
|---|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> $t^3 + 1$ | <input type="checkbox"/> $t \ln(t)$ | <input type="checkbox"/> t | <input type="checkbox"/> $t\sqrt{t}$ |
| <input type="checkbox"/> $\frac{1}{3t}$ | <input type="checkbox"/> t^2 | <input type="checkbox"/> \sqrt{t} | <input type="checkbox"/> $\frac{4}{15}t^{\frac{5}{2}}$ |

- (b) (5 point). Hvad er buelængden af kurven fra $t = 1$ til $t = 5$?

- | | | | |
|-------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> 14 | <input type="checkbox"/> $10\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> $7\sqrt{3}$ | <input type="checkbox"/> 18 |
| <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 11 | <input type="checkbox"/> $\frac{25}{2}$ |

Opgave 4 (7 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}.$$

(a) (3 point). Hvad er den afledede $f'(x)$?

$\frac{1}{2x}$

$(x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}}$

$2x(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}}$

$-\frac{2x}{(x^2+2)^2}$

$-\frac{1}{(x^2+2)^2}$

$\ln(x^2 + 2)$

(b) (4 point). Hvilket af nedenstående polynomier er anden ordens Taylor polynomiet for f med udviklingspunkt $x = 0$?

$1 + x - \frac{3}{2}x^2$

$\frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}x^2$

$2 + 4x - 5x^2$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2$

$x - \frac{1}{2}x^2$

Opgave 5 (7 point)

Betragt differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{y}, \quad y > 0.$$

Der er en entydig løsning $y(x)$ med begyndelsesværdi $y(0) = 2$. Besvar følgende spørgsmål angående denne løsning:

(a) (3 point). Hvad er differentialkvotienten $y'(0)$?

-2

$\frac{1}{2}$

2

$-\frac{1}{2}$

1

3

(b) (4 point). Hvad er funktionsværdien $y(1)$?

5

$\frac{1}{3}$

$\ln(2)$

$e + 1$

1

$\sqrt{2e + 2}$

Opgave 6 (6 point)

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = \frac{4 + 3i}{2 - i} + 1 + i, \quad z_2 = (e^{2 + \frac{\pi}{6}i})^3$$

(a) (3 point). Hvad er z_1 skrevet på standard form?

- | | | | |
|-----------------------------------|---|----------------------------------|-----------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $2 + 3i$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$ | <input type="checkbox"/> $1 - i$ | <input type="checkbox"/> $8i$ |
| <input type="checkbox"/> $1 + i$ | <input type="checkbox"/> $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$ | <input type="checkbox"/> $-3i$ | <input type="checkbox"/> $-5 + i$ |

(b) (3 point). Hvad er z_2 skrevet på standard form?

- | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $1 + e^3i$ | <input type="checkbox"/> $1 - e^2i$ | <input type="checkbox"/> $-e^9$ | <input type="checkbox"/> $e + e^2i$ |
| <input type="checkbox"/> e^6 | <input type="checkbox"/> $1 + e^2i$ | <input type="checkbox"/> e^6i | <input type="checkbox"/> $1 + 3i$ |

Opgave 7 (6 point)

En funktion er defineret som

$$f(x, y) = x \cos(y) - y \sin(x).$$

(a) (2 point). Hvad er den partielle afledede $f_x(x, y)$?

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $-\sin(y) - \cos(x)$ | <input type="checkbox"/> $\tan(y) + \sin(x)$ |
| <input type="checkbox"/> $\cos(y)$ | <input type="checkbox"/> $\cos(y) - y \cos(x)$ |
| <input type="checkbox"/> $\tan(y) - 1$ | <input type="checkbox"/> $x^2 \cos(y)$ |

(b) (4 point). Grafen for f har en tangentplan i punktet $P = (\frac{\pi}{2}, 0, f(\frac{\pi}{2}, 0))$.
Markér en ligning for denne tangentplan.

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $x - y - z = 0$ | <input type="checkbox"/> $x + 2y - 3z = \frac{\pi}{2}$ |
| <input type="checkbox"/> $2x + y - 2z = 0$ | <input type="checkbox"/> $x - y + z = \pi$ |
| <input type="checkbox"/> $x + y - z = \frac{\pi}{2}$ | <input type="checkbox"/> $x + y + 2z = -\pi$ |

Opgave 8 (16 point)

En funktion af to reelle variable er givet ved forskriften

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}.$$

Besvar spørgsmålene herunder angående denne funktion.

(a) (4 point). Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x, y) , der opfylder

$x \geq 0$ og $y \geq 0$

$y \neq 0$

$x > 0$ og $y > 0$

x og y er reelle tal

$x \neq 0$ og $y \neq 0$

$x \neq y$

(b) (4 point). Hvilke af følgende punkter er kritiske punkter for f ? (Bemærk: I dette delspørgsmål ophæver hver forkert afkrydsning én rigtig afkrydsning.)

$(0, 1)$

$(0, 2)$

$(1, 1)$

$(0, -1)$

$(1, -1)$

$(2, -1)$

(c) (4 point). Hvad er den regningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (1, 1)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$?

$\frac{8}{5}$

1

$\frac{3}{25}$

$-\frac{3}{5}$

2

$-\frac{2}{45}$

(d) (4 point). Niveaukurven med ligning $f(x, y) = \frac{1}{4}$ kan beskrives som:

En parabel med ligning $y = x^2 + 3$.

En parabel med ligning $y = x^2 - x + 4$.

En ret linje gennem $(0, \sqrt{3})$ med hældningskoefficienten 2.

En ret linje gennem $(0, 3)$ med hældningskoefficienten $-\frac{1}{2}$.

En cirkel med centrum i $(0, 2)$ og radius $\sqrt{3}$.

En cirkel med centrum i $(1, 1)$ og radius $\frac{1}{3}$.

Opgave 9 (7 point)

En tynd plade dækker netop et område \mathcal{R} i planen. Området \mathcal{R} består af de punkter (x, y) , som opfylder ulighederne

$$0 \leq x, \quad 0 \leq y, \quad 3x + y \leq 6.$$

Pladens densitet er $\delta(x, y) = x$. Hvad er pladens masse?

- | | | | | |
|--|----------------------------|--|--------------------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> $\frac{9}{2}$ | <input type="checkbox"/> $5\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> 12 |
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 10 | <input type="checkbox"/> 14 |

Opgave 10 (10 point)

Et område \mathcal{R} i planen består af de punkter (x, y) , som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq y, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9.$$

Markér værdien af planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{y}{x^2 + y^2} dA.$$

- | | | | | |
|--|-------------------------------------|--|-----------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> $\frac{1}{3}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{7}{2}$ | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 12 |
| <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> $5\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> 10 | <input type="checkbox"/> $\frac{25}{2}$ |

Opgave 11 (8 point)

Et område \mathcal{T} i rummet består af de punkter (x, y, z) , som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 2y \leq z \leq 9 - 3xy^2.$$

Hvad er rumfanget (volumen) af \mathcal{T} ?

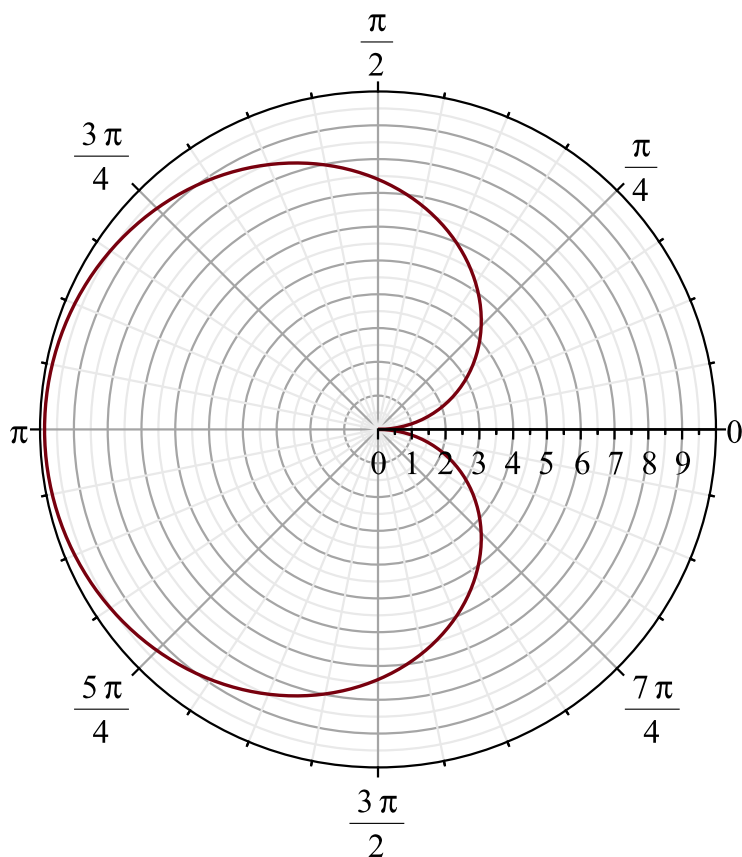
- | | | | | |
|----------------------------|--|-----------------------------|-----------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> $\frac{7}{2}$ | <input type="checkbox"/> 12 | <input type="checkbox"/> 16 | <input type="checkbox"/> $18\sqrt{3}$ |
| <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 14 | <input type="checkbox"/> 20 | <input type="checkbox"/> $\frac{50}{3}$ |

Opgave 12 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f svarer til figuren?

$f(\theta) = 1 + \cos \theta$

$f(\theta) = 1 - \cos \theta$

$f(\theta) = 1 - \theta^2$

$f(\theta) = 8 \sin^2 \theta$

$f(\theta) = \theta(2\pi - \theta)$

$f(\theta) = 10 - \theta^2$