

Reeksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

17. februar 2017

Dette eksamenssæt består af 11 nummererede sider med 14 afkrydningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger. Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

Held og lykke!

NAVN: _____

STUDIENUMMER: _____

Opgave 1 (8 point)

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 1 - 3i, \quad z_2 = 1 + 2i.$$

(a) (4 point). Hvad er $z_1 z_2 - z_1$ skrevet på standard form?

$-3i$ $2 + i$ $5 - 3i$ $6 + 2i$ $1 - i$

(b) (4 point). Hvad er $\bar{z}_1 - z_2$ skrevet på polær form?

$e^{\pi i/4}$ $3e^{\pi i/6}$ $\sqrt{2}e^{\pi i/4}$ $e^{-\pi i/4}$ $e^{\pi i/2}$

Opgave 2 (6 point)

En homogen anden ordens differentiaalligning er givet ved

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk, hvori c_1 og c_2 er arbitrære konstanter. Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentiaalligningen.

$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{8t}$

$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$

$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$

$y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t}$

$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

$y(t) = c_1 e^{-2t} \cos(4t) + c_2 e^{-2t} \sin(4t)$

$y(t) = c_1 e^{-t} \cos(8t) + c_2 e^{-t} \sin(8t)$

$y(t) = c_1 e^{2t} \cos(4t) + c_2 e^{2t} \sin(4t)$

Opgave 3 (7 point)

Det oplyses, at den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 6y' + 10y = 0$$

kan angives som

$$y(t) = c_1 e^{3t} \cos t + c_2 e^{3t} \sin t,$$

hvor c_1 og c_2 er arbitrære konstanter.

(a) (2 point). Markér det korrekte udtryk for $y(0)$.

$c_1 + c_2$ c_1 $c_1 - c_2$ c_2 $3c_1 + 3c_2$

(b) (2 point). Markér det korrekte udtryk for $y'(0)$.

$3c_1$ $3c_1 + 3c_2$ $3c_2$ $3c_1 + c_2$ $c_1 - 3c_2$

(c) (3 point). Begyndelsesværdiproblemet

$$y'' - 6y' + 10y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

har en entydig løsning $y(t)$. Find denne løsning og angiv funktionsværdien $y(\frac{\pi}{2})$ herunder.

$-5e^{3\pi/2}$ $5e^{3\pi/2}$ $2e^{3\pi/2}$ $-e^\pi$ $4e^{\pi/2}$

Opgave 4 (7 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x) = (1 + x) \ln(1 + x) - x$$

for $x > -1$.

(a) (3 point). Hvad er den dobbelt afledede $f''(x)$?

$\frac{1}{1+x}$

$\ln(x + 1) - 1$

$-\frac{1}{x}$

$\frac{1}{(1+x)^3}$

$\frac{1}{1+x} - 1$

$\frac{1}{x} - 1$

(b) (4 point). Hvilket af nedenstående polynomier er tredje ordens Taylor polynomiet for $f(x)$ med udviklingspunkt $x = 0$?

$x^2 + \frac{3}{2}x^3$

$x - \frac{1}{24}x^2$

$1 - 5x$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$

$\frac{1}{2}x^3$

$x - \frac{1}{3}x^3$

$2x^3$

$x - x^2 + \frac{1}{6}x^3$

$2 + x^2 - \frac{1}{2}x^3$

$x^2 - x^3$

Opgave 5 (9 point)

En kurve i planen er givet ved

$$\begin{aligned}x &= e^t, \\y &= t^2,\end{aligned}$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (3 point). Hvilket af følgende punkter ligger på kurven?

- | | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|--|---|
| <input type="checkbox"/> $(e, 4)$ | <input type="checkbox"/> $(1, 1)$ | <input type="checkbox"/> $(2, \sqrt{2})$ | <input type="checkbox"/> $(2, \frac{1}{2})$ |
| <input type="checkbox"/> $(0, -1)$ | <input type="checkbox"/> $(e^2, 4)$ | <input type="checkbox"/> $(1, -1)$ | <input type="checkbox"/> $(2, -\sqrt{2})$ |

(b) (6 point). Kurvens krumning er nul i netop et punkt. Hvilket af følgende punkter er det?

- | | | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|--|---|
| <input type="checkbox"/> $(1, 0)$ | <input type="checkbox"/> $(0, 1)$ | <input type="checkbox"/> $(e, 1)$ | <input type="checkbox"/> $(2, (\ln 2)^2)$ |
| <input type="checkbox"/> $(e^3, 9)$ | <input type="checkbox"/> $(-1, 0)$ | <input type="checkbox"/> $(e^{-2}, 4)$ | <input type="checkbox"/> $(e^{-1}, 1)$ |

Opgave 6 (8 point)

En kurve i rummet er givet ved

$$\begin{aligned}x &= 8t, \\y &= 3 \sin(2t), \\z &= 3 \cos(2t),\end{aligned}$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (3 point). Markér det korrekte udtryk for den afledede z' .

- | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--|--------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $-\sin(2t)$ | <input type="checkbox"/> $6 \cos(t)$ | <input type="checkbox"/> $-6 \sin(2t)$ | <input type="checkbox"/> $-\sin(t)$ |
| <input type="checkbox"/> $\sin(2t)$ | <input type="checkbox"/> $-\sin(6t)$ | <input type="checkbox"/> $\sin(5t)$ | <input type="checkbox"/> $-\sin(5t)$ |

(b) (5 point). Hvad er buelængden af kurven fra $t = 1$ til $t = 2$?

- | | | | |
|----------------------------|-----------------------------|--|--|
| <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 10 | <input type="checkbox"/> $\sqrt{6}$ | <input type="checkbox"/> $2\sqrt{3}$ |
| <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{5}{2}$ |

Opgave 7 (8 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \frac{2x + 3}{x^2 + y^2}.$$

Afkryds den rigtige mulighed i hvert delspørgsmål herunder.

(a) (4 point). Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x, y) , der opfylder

$x^2 \geq y^2$

$x > 0$ og $y > 0$

$x > y$

$x^2 + y^2 \geq 2x + 3$

$2x \geq 3$

$x \neq 0$ eller $y \neq 0$

(b) (4 point). Niveaukurven med ligning $f(x, y) = 1$ kan beskrives som:

En parabel med ligning $y = x^2 + x - 1$.

En parabel med ligning $y = x^2 - 2x + 1$.

En ret linje gennem $(-1, 0)$ med hældningskoefficienten 2.

En ret linje gennem $(-1, 0)$ med hældningskoefficienten -3 .

En cirkel med centrum i $(1, 0)$ og radius 2.

En cirkel med centrum i $(2, 3)$ og radius $\frac{1}{2}$.

Opgave 8 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x, y) = \arctan(x^2 - y^2).$$

(a) (3 point). Hvad er funktionsværdien $f(\sqrt{2}, 1)$?

- 0 $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$ 1 $\frac{\pi}{4}$

(b) (3 point) Hvad er den partielle afledede $f_x(x, y)$?

- $(2x - 2y)(1 + (x^2 - y^2)^2)$ $\frac{2x-2y}{1+(x-y)^2}$
 $\frac{2x}{1+(x^2-y^2)^2}$ $2x(1 + (x^2 - y^2)^2)$
 $\frac{2xy}{1+(xy)^2}$ $\frac{2x}{1+x^2}$

Opgave 9 (7 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + y + 1.$$

(a) (3 point). Hvilket af følgende punkter er et kritisk punkt for f ?

- (1, 2) (-1, 3) (3, 3) (4, -1) (5, -4)

(b) (4 point). Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (-2, 1)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$?

- 8 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ $\sqrt{3} + 2$ $2\sqrt{3} - 1$ $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

Opgave 10 (5 point)

En flade \mathcal{F} i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = e^{x+y} - z + 2.$$

Fladen \mathcal{F} har en tangentplan i punktet $P = (2, -2, 3)$. Markér en ligning for denne tangentplan.

$2y + z = -1$

$-x + 2y + 2z = 0$

$x - y - z = 1$

$x + y - z = -3$

$2x + y - z = 1$

$3x + 3y - 4z = -12$

$x + y + z = 3$

$-x + 2y + 4z = 2$

$2x + 2y + z = 3$

$5x + 4y + z = 3$

Opgave 11 (10 point)

Et område \mathcal{R} i planen består af de punkter (x, y) , som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq 1, \quad -x \leq y \leq \sqrt{x}.$$

Markér værdien af planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} 2x^2y \, dA.$$

$\frac{1}{10}$

$\frac{3}{10}$

$\frac{1}{4}$

7

$\frac{1}{3}$

$\frac{5}{4}$

$\frac{1}{20}$

$\frac{11}{5}$

$\frac{7}{2}$

$\frac{3}{20}$

Bemærkning. I opgave 12 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 12 (6 point)

Lad \mathcal{T} være området i rummet bestående af de punkter (x, y, z) , som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq 1, \quad -x \leq y \leq x, \quad 0 \leq z \leq 1 - x.$$

Et legeme med massetætheden (densiteten) $\delta(x, y, z) = 1 + x$ dækker netop området \mathcal{T} . Legemets rumfang (volumen) betegnes V , og legemets masse betegnes m . Markér samtlige korrekte udtryk nedenfor.

$m = \int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 \int_0^{1-x} (1+x) dz dx dy.$

$m = \int_0^1 \int_{-x}^x \int_0^{1-x} (1+x) dz dy dx.$

$m = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{-x}^x (1+x) dz dx dy.$

$V = \int_{-1}^1 \int_y^1 \int_0^{1-x} dz dx dy.$

$V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-x} dz dy dx.$

Opgave 13 (8 point)

Besvar følgende 4 sand/falsk opgaver:

- (a) (2 point). Punktet med rektangulære koordinater $(x, y) = (\sqrt{3}, 1)$ har polære koordinater $(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{6})$.

Sand

Falsk

- (b) (2 point). For ethvert komplekst tal z gælder der, at

$$|\bar{z}|^4 = |z^4|.$$

Sand

Falsk

- (c) (2 point). Lad D være området i planen bestående af de punkter (x, y) , som opfylder ulighederne $0 \leq x \leq 1$ og $0 < y \leq 1$. Lad f være funktionen med forskrift

$$f(x, y) = x + y$$

og definitionsmængde D . Da antager f globalt maksimum på D .

Sand

Falsk

- (d) (2 point). Det gælder, at

$$\sqrt{2} e^{-i\pi/4} = 1 - i.$$

Sand

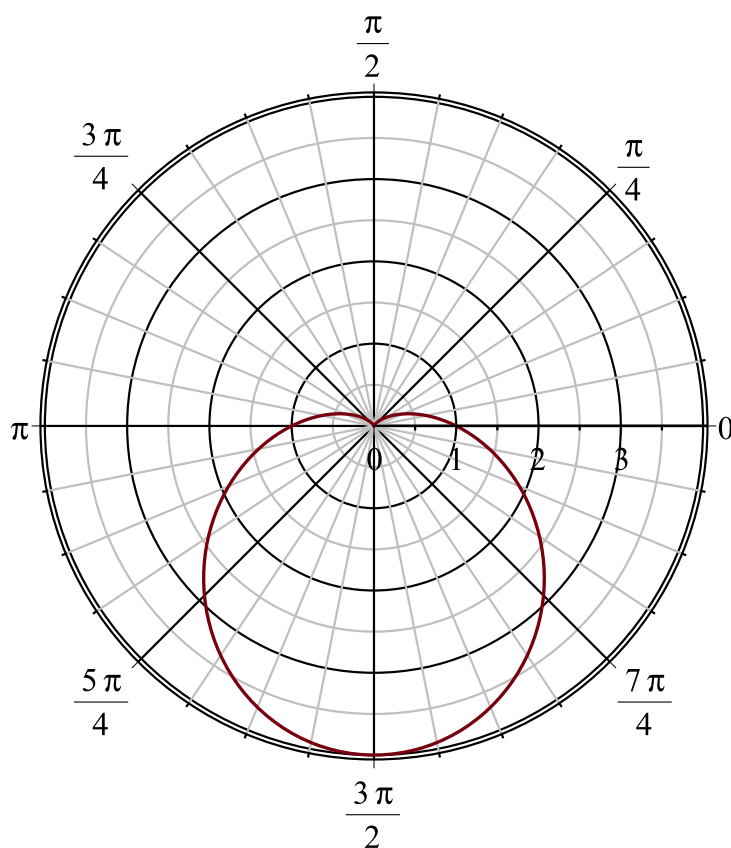
Falsk

Opgave 14 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f svarer til figuren?

$f(\theta) = 3 + \cos^2 \theta$

$f(\theta) = 1 - \sin(2\theta)$

$f(\theta) = 1 + \sin^2 \theta$

$f(\theta) = (1 - \sin \theta)^2$

$f(\theta) = 1 - \sin \theta$

$f(\theta) = 2 - \cos \theta$