

To find the English version of the exam, please read from the other end!

Se venligst bort fra den engelske version på bagsiden hvis du følger denne danske version af prøven.

Eksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design,
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

24. august 2018

Dette eksamenssæt består af 8 nummererede sider med 12 afkrydningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. I hver delopgave skal der **kun afkrydses én svarmulighed**. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger.

Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder. Du bedes også afkrydse det hold som du deltager i.

Held og lykke!

NAVN: _____

STUDIENUMMER: _____

Hold 2: EIT – ITC – PDP Henrik Garde

Hold 3: ROB Anathanasios Georgiadis

Facit

Opgave 1 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x, y) = \frac{x - 3y^2 - 1}{y^2 - x}$$

for reelle variable x og y .

(a) (2 point) Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x, y) der opfylder

- | | | |
|--|---|---|
| <input type="checkbox"/> $y \neq \sqrt{ x }$ | <input type="checkbox"/> $x > 0, y < 0$ | <input type="checkbox"/> $3y^2 = x + 1$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $y^2 \neq x$ | <input type="checkbox"/> $x < 0, y > 0$ | <input type="checkbox"/> $y = \sqrt{x}$ |

(b) (4 point) Markér det korrekte udtryk for niveaukurven $f(x, y) = -3$.

- En parabel $x = 2y^2 + 1$
- En parabel $x = 3y^2 - 1$
- En cirkel med centrum i $(-1, 0)$ og radius 1
- En cirkel med centrum i $(-1, 0)$ og radius 1, undtagen punktet $(0, 0)$
- En ret linje $x = -\frac{1}{2}$
- En ret linje $x = -\frac{1}{2}$, undtagen punkterne $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ og $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Opgave 2 (6 point)

En parametrisk kurve i rummet er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{5t}, e^{(t^2)} \rangle$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (3 point) Hvad er kurvens fart for $t = 0$?

- | | | |
|---------------------------------------|---|--------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> $\sqrt{15}$ | <input type="checkbox"/> 5 |
| <input type="checkbox"/> $2\sqrt{13}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\sqrt{26}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{30}$ |

(b) (3 point) Hvilken af de følgende vektorer er kurvens accelerationsvektor for $t = 2$?

- | | | |
|--|---|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> $\langle e^2, 25e^{10}, 18e^4 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle e^2, e^{10}, e^4 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 0, 0, 0 \rangle$ |
| <input type="checkbox"/> $\langle 1, 25, 10 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle e^2, 5e^{10}, 4e^4 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle e^2, 25e^{10}, 16e^4 \rangle$ |

Opgave 3 (6 point)

Tre komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} \quad \text{og} \quad z_3 = 2 + 2i.$$

(a) (3 point) Hvad er $z_1 z_3$ på standard form?

- | | | |
|-----------------------------------|--|---|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> $2 + 4i$ | <input type="checkbox"/> $1 + i$ |
| <input type="checkbox"/> $6 + 4i$ | <input type="checkbox"/> $2\sqrt{10}e^{\frac{2\pi}{3}i}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $-2 + 6i$ |

(b) (3 point) Hvad er $\frac{z_2}{z_3}$ på polær form?

- | | | |
|---|---|---|
| <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}$ | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}i}$ |
| <input type="checkbox"/> $4e^{\frac{5\pi}{4}i}$ | <input type="checkbox"/> $2e^{\frac{7\pi}{4}i}$ | <input type="checkbox"/> $e^{\frac{3\pi}{2}i}$ |

Opgave 4 (10 point)

(a) (5 point) En homogen anden ordens differentiaalligning er givet ved

$$y'' + 2y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk hvori c_1 og c_2 er arbitrære reelle konstanter. Markér det udtryk som udgør den fuldstændige løsning til differentiaalligningen.

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 e^{-\sqrt{2}t} + c_2 e^{\sqrt{2}t}$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t)$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $y(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t)$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 t^2 + c_2 \sqrt{2}t$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{2t}$ |

(b) (5 point) Markér en partikulær løsning x_p til den inhomogene differentiaalligning

$$x'' + 2x = 4t^2,$$

blandt følgende funktionsudtryk.

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $x_p(t) = 2t^2$ | <input type="checkbox"/> $x_p(t) = -4t^2 - t - 2$ |
| <input type="checkbox"/> $x_p(t) = -4t^2$ | <input checked="" type="checkbox"/> $x_p(t) = 2t^2 - 2$ |
| <input type="checkbox"/> $x_p(t) = t^2 + t + 1$ | <input type="checkbox"/> $x_p(t) = 3t^4 + 2t^2 + 2t - 1$ |
| <input type="checkbox"/> $x_p(t) = 2t^2 - t - 2$ | <input type="checkbox"/> $x_p(t) = \cos(t) + \sin(t) + t^2 - 2$ |

Opgave 5 (8 point)

Markér om de følgende udsagn omkring krumning er sandt eller falsk.

(a) (2 point) En ret linje kan have positiv krumning.

Sandt

Falsk

(b) (2 point) En cirkel med radius R har konstant krumning $\frac{1}{R}$.

Sandt

Falsk

I delopgaverne (c) og (d) skal følgende tages til eftertragtning: To partikler $\mathbf{r}_A(t)$ og $\mathbf{r}_B(t)$ bevæger sig langs den samme kurve der indeholder et punkt P .

(c) (2 point) *Farten* for $\mathbf{r}_A(t)$ er dobbelt så stor som farten for $\mathbf{r}_B(t)$. Så er krumningen af $\mathbf{r}_A(t)$ i punktet P den samme som krumningen af $\mathbf{r}_B(t)$ i P .

Sandt

Falsk

(d) (2 point) *Accelerationen* for $\mathbf{r}_A(t)$ er dobbelt så stor som accelerationen for $\mathbf{r}_B(t)$. Så er krumningen af $\mathbf{r}_A(t)$ i punktet P dobbelt så stor som krumningen af $\mathbf{r}_B(t)$ i P .

Sandt

Falsk

Opgave 6 (6 point)

En funktion f er for $t \geq 0$ givet ved

$$f(t) = e^t \cos(2t) + 4t^2 + t + 2.$$

Hvilket af de følgende udtryk er $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ for $s > 1$ (Laplace transformationen af f)?

$\frac{2}{(s-1)^2+4} + \frac{8+s+2s^2}{s^3}$

$\frac{s-1}{(s-2)(s^2-1)} + \frac{8+2s^2}{s^3}$

$\frac{s-2}{(s-2)^2+4} + \frac{8}{s^3} + \frac{1+2s}{s^2}$

$\frac{2}{(s-1)^2+4} + \frac{4}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}$

$\frac{s-1}{(s-1)^2+4} + \frac{8}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}$

$\frac{s-2}{(s-2)+1} + \frac{8+s}{s^3} + \frac{2}{s}$

Opgave 7 (6 point)

En funktion F er for $s > 3$ givet ved

$$F(s) = \frac{6s - 2}{(s - 3)(s + 5)}.$$

Hvilket af de følgende udtryk er $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t)$ for $t \geq 0$ (invers Laplace transformation af F)?

$e^{5t} + 2e^{-3t}$

$2e^{3t} + 4e^{-5t}$

$2e^{-3t} + 5e^{5t}$

$3te^{5t} + 3e^{-3t}$

$\frac{1}{2}e^{3t} + 4e^{-5t}$

$e^{-5t} + 2e^{3t}$

Opgave 8 (10 point)

En flade \mathcal{F} i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = -2 \sin(z) + yz - x^2y + y^2 - 1.$$

(a) (5 point) Hvilken af de følgende ligninger udgør tangentplanen til \mathcal{F} i punktet $P = (0, 1, 0)$?

$0 = x + \frac{3}{2}y + z$

$z = -\frac{1}{2}y - 1$

$z = 1$

$z = 2y - 2$

$2 = -2y + 2z$

$0 = -x - y + 3z$

(b) (5 point) Fra ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvad er den partielle afledede $\partial z / \partial y$ i punktet P ?

-3

-1

0

2

π

3

Opgave 9 (17 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \arctan(2x + y) = \tan^{-1}(2x + y),$$

for variable x og y der begge gennemløber alle de reelle tal.

- (a) (4 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: Funktionen f har mindst ét kritisk punkt.

Sandt

Falsk

- (b) (4 point) Markér om følgende udsagn er sandt eller falsk: Funktionen f har et globalt maksimum.

Sandt

Falsk

- (c) (4 point) Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (-1, 1)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$?

-2

$\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$5\sqrt{2}$

4

- (d) (5 point) Hvilken af de følgende enhedsvektorer peger i den retning hvor f vokser hurtigst i punktet P (retningen \mathbf{v} hvor $D_{\mathbf{v}}f(P)$ er størst)?

$\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$

$\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$

$\langle 0, -1 \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle$

$\langle \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \rangle$

$\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$

$\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle$

$\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$

Opgave 10 (9 point)

En funktion er givet ved

$$f(x) = \ln(\sqrt{2x+1})$$

for $x > -2^{-1/2}$.

(a) (5 point) Markér det korrekte udtryk for $f''(x)$ (*hint: husk at bruge kædere-*
len).

$2 \ln(\sqrt{2x+1})$

$\frac{-2}{(\sqrt{2x+1})^2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{\ln(\sqrt{2x+1})}$

$\frac{2}{2x^2+2\sqrt{2x+1}}$

$\frac{-2\ln(\sqrt{2x+1})}{(\sqrt{2x+1})^2}$

(b) (4 point) Hvilket af de følgende udtryk er anden ordens Taylor polynomiet
for f med udviklingspunkt $x = 0$?

$1 + \sqrt{2}x^2$

$1 - x^2$

$\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$

$1 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}x^2$

$1 + 2x - x^2$

$\sqrt{2}x + 2x^2$

$-2x + \sqrt{2}x^2$

$\sqrt{2}x - x^2$

$2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}x^2$

Opgave 11 (11 point)

En kurve i planen er givet ved

$$x = t + 3t^2,$$

$$y = 3t - t^2.$$

(a) (2 point) For hvilken værdi af parameteren t går kurven gennem punktet
 $P = (4, 2)$?

$-\pi$

-1

$-\frac{\pi}{4}$

0

1

(b) (4 point) Hvad er kurvens krumning i P ?

$\frac{\sqrt{2}}{25}$

$\frac{3}{50\sqrt{50}}$

0

$\frac{\sqrt{2}}{100}$

$\frac{20}{\sqrt{5}}$

(c) (5 point) For hvilken værdi af parameteren t er krumningen maksimal?

-3

0

2π

-1

1

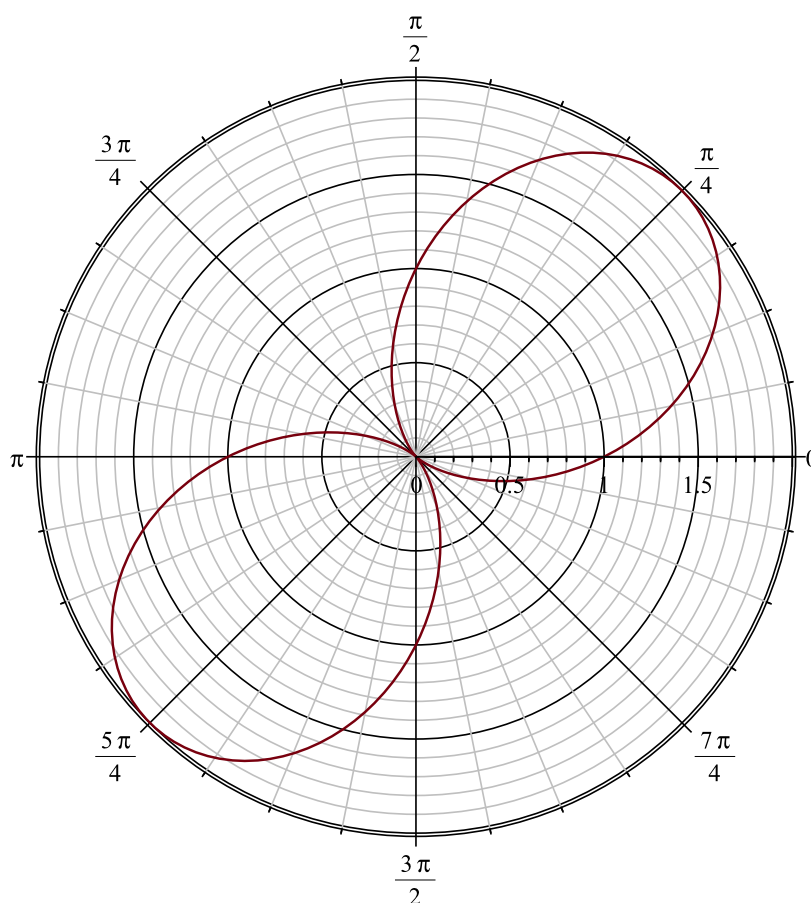
7

Opgave 12 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for en funktion

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

afbildet i polære koordinater.



En af forskrifterne for f i listen nedenfor svarer til figuren. Hvilken?

$f(\theta) = \sin(2\theta) + 1$

$f(\theta) = \theta^2 + 1$

$f(\theta) = \cos(4\theta) - 1$

$f(\theta) = \cos(2\theta) \sin(\theta)$

$f(\theta) = \sin(\theta) - \cos(\theta)$

$f(\theta) = 2 - \sin(2\theta)$