Eksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design,
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

15. juni 2020

Dette eksamenssæt består af 10 nummererede sider med 11 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Opgave 1 (9 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x,y) = \ln(2x^2 + 2y^2),$$

hvor x og y er relle variable.

(a) (3 point) Definitionsmængden for f består af

- ☐ cirkelskiven med centrum i $(0,0)$ og radius 1.
- ☐ alle punkter uden for cirkelskiven med centrum i $(0,0)$ og radius 1.
- ☐ de punkter (x,y) hvor $x \geq 0$ og $y \geq 0$.
- ☐ de punkter (x,y) hvor $x > 0$ og $y > 0$.
- ☐ alle punkter i planen.
- ☐ alle punkter i planen undtagen punktet $(0,0)$.
- ☐ ingen af ovenstående.

(b) (3 point) Hvilken af nedenstående svarmuligheder beskriver niveaukurven $f(x,y) = 0$?

- ☐ Parablen $y = x^2$
- ☐ Cirklen med centrum i $(0,0)$ og radius 2
- ☐ Cirklen med centrum i $(0,0)$ og radius $\frac{1}{2}$
- ☐ Cirklen med centrum i $(0,0)$ og radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ☐ Alle punkter i planen
- ☐ Punktet $(0,0)$
- ☐ Ingen af ovenstående

(c) (3 point) Hvilket af nedenstående funktionsudtryk angiver den anden ordens partielle afledede f_{xy} ?

- ☐ $\frac{1}{x^2+y^2}$
- ☐ $(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$
- ☐ $4xy\ln(2x^2+2y^2)$
- ☐ $-\frac{2xy}{3(x^2+y^2)}$
- ☐ $\frac{xy}{4(x^2+y^2)^2}$
- ☐ $-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$

Opgave 2 (8 point)

Tre komplekse tal er givet ved

$$z_1 = \frac{1-i}{1+3i}, \quad z_2 = (1+i)^4, \quad z_3 = e^{2+\frac{\pi}{2}i}.$$

(a) (2 point) Hvad er z_1 skrevet på standardform $(a+ib)$?

- ☐ $2-2i$
- ☐ $1-3i$
- ☐ $\frac{3}{10}-\frac{1}{5}i$
- ☐ $-\frac{1}{10}-\frac{1}{10}i$
- ☐ $1-\frac{1}{3}i$
- ☐ $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$
- ☐ $-2-4i$
- ☐ $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i$

(b) (2 point) Hvad er $|z_2|$?

- ☐ 1
- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ 4
- ☐ 16
- ☐ 2
- ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ☐ $2\sqrt{2}$
- ☐ -4

(c) (2 point) Hvilket af følgende tal er et argument for z_2 ?

- ☐ $\frac{\pi}{8}$
- ☐ $\frac{\pi}{4}$
- ☐ $\frac{\pi}{2}$
- ☐ $-\pi$
- ☐ $\frac{7\pi}{8}$
- ☐ $\frac{3\pi}{4}$
- ☐ $\frac{3\pi}{2}$
- ☐ 0

(d) (2 point) Hvad er realdelen af z_3 ?

- ☐ 0
- ☐ $\frac{\sqrt{2}e}{2}$
- ☐ e
- ☐ e^{-2}
- ☐ e^2
- ☐ $\frac{\pi}{2}$
- ☐ $-e^2$
- ☐ 2

Opgave 3 (7 point)

(a) (3 point) En funktion er givet ved

$$f(t) = 4t^2 + e^{3t},$$

hvor t er et reelt tal. Angiv den Laplace transformerede $F(s) = L(f(t))$.

- ☐ $4s^2 + e^{3s}$
- ☐ $\frac{9}{s^3(s-3)}$
- ☐ $4t^2 + e^{3t}$
- ☐ $\frac{1}{s-3} + \frac{8}{s^3}$
- ☐ $8s^2 + 3e^{3s}$
- ☐ Ingen af delene

(b) (4 point) Betragt funktionen

$$F(s) = \frac{7s - 17}{(s-3)(s-2)},$$

hvor $s > 3$. Angiv dens invers Laplace transformerede $f(t) = L^{-1}(F(s))$.

- ☐ $7e^{3t} - 17e^{2t}$
- ☐ $-10e^{6t}$
- ☐ $4e^{3t} + 3e^{2t}$
- ☐ $-109e^{5t}$
- ☐ $4e^{-3t} + 3e^{-2t}$
- ☐ Ingen af delene

Opgave 4 (10 point)

(a) (4 point) En differentialligning af anden orden er givet ved

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk, hvori c_1 og c_2 er arbitrære konstanter. Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

- ☐ $y(t) = c_1e^{2t} + c_2$
- ☐ $y(t) = c_1e^{t} + c_2e^{-t}$
- ☐ $y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$
- ☐ $y(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$
- ☐ $y(t) = c_1e^{t}\cos(2t) + c_2e^{t}\sin(2t)$
- ☐ $y(t) = c_1e^{t}\cos(3t) + c_2e^{t}\sin(3t)$
- ☐ $y(t) = c_1e^{-t}\cos(t) + c_2e^{-t}\sin(t)$
- ☐ $y(t) = c_1e^{2t}\cos(t) + c_2e^{2t}\sin(t)$

(b) (3 point) Betragt den inhomogene differentialligning

$$y'' + 2y' + 2y = 8t.$$

Hvilken af følgende funktioner er en partikulær løsning til denne ligning?

- ☐ $8t + \frac{1}{2}$
- ☐ $8t - 2$
- ☐ $4t + 4$
- ☐ $4t - 2$
- ☐ $2t$
- ☐ $4t - 4$
- ☐ $2 - 2t$
- ☐ $\frac{1}{8}t + \frac{1}{4}$

(c) (3 point) Markér løsningen til begyndelsesværdiproblemet

$$y'' + 2y' + 2y = 8t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

blandt følgende muligheder:

- ☐ $y(t) = 4t + e^{2t}$
- ☐ $y(t) = 2t - 2e^{-t} - 2e^{t}$
- ☐ $y(t) = 8t - 2 + 2e^{-t}$
- ☐ $y(t) = 4 - 4t - 4e^{-t}$
- ☐ $y(t) = 8t - 2 - 6e^{-t}\sin(2t)$
- ☐ $y(t) = 4t - 4 + 4e^{-t}\cos(t)$
- ☐ $y(t) = 4 + 4t + 2e^{-t}\sin(t)$
- ☐ $y(t) = 2t + 2e^{t}\cos(t) - e^{t}\sin(t)$

Opgave 5 (7 point) En funktion er defineret ved

$$f(x) = \cos(e^{2x} - 1)$$

for alle reelle tal x.

(a) (3 point) Hvad er den anden afledede $f''(x)$?

- ☐ $-2\cos(e^{2x} - 1)$
- ☐ $-6e^{2x}\cos(e^{2x} - 1) - 8e^{2x}\sin(e^{2x} - 1)$
- ☐ $-4e^{4x}\cos(e^{2x} - 1) - 4e^{2x}\sin(e^{2x} - 1)$
- ☐ $3e^{4x}\cos(e^{2x} - 1) + 3e^{2x}\sin(e^{2x} - 1)$
- ☐ $e^{2x}\cos(e^{2x} - 1) + e^{2x}\sin(e^{2x} - 1)$
- ☐ $-4e^{2x}\sin(e^{2x} - 1)$

(b) (4 point) Hvilket af nedenstående polynomier er Taylor-polynomiet af anden orden for f med udviklingspunkt $x = 0$?

- ☐ $1 - x^2$
- ☐ $1 - 4x^2$
- ☐ $1 - x + 2x^2$
- ☐ $-2x - 2x^2$
- ☐ $1 - 2x^2$
- ☐ $1 + x - \frac{1}{2}x^2$

Opgave 6 (12 point)

Opgaven handler om løsning af begyndelsesværdiproblemet

$$f'(t) - 3f(t) = 2e^{3t} - 15$$
$$f(0) = 5$$

ved hjælp af Laplace transformen.

(a) (4 point) Når man tager Laplace transformen på begge sider af differentialligningen, fører det til følgende algebraiske ligning i $F(s) = L(f(t))$:

- ☐ $sF(s) - 5 - 3F(s) = 2 \cdot \frac{1}{s-3} - \frac{15}{s}$
- ☐ $sF(s) - 5 = -13e^{3s}$
- ☐ $(s+3)F(s) = 2e^{3s} - 15$
- ☐ Ingen af delene

(b) (4 point) Når man løser den algebraiske ligning i (a), finder man følgende udtryk for $F(s) = L(f(t))$:

- ☐ $\frac{13e^{3s}}{s-5}$
- ☐ $\frac{5s^2-28s+45}{s(s-3)^2}$
- ☐ $\frac{s^2(s-13)}{s(s-3)}$
- ☐ Ingen af delene

(c) (4 point) Til sidst findes løsningen til begyndelsesværdiproblemet $f(t) = L^{-1}(F(s))$ ved hjælp af den inverse Laplace transform. Løsningen bliver:

- ☐ $e^{3t} + 5t$
- ☐ $2te^{3t} + 5$
- ☐ $e^{3s} + 5s$
- ☐ Ingen af delene

Opgave 7 (12 point)

Betragt funktionen

$$f(x,y) = e^{x^2(1-y^2)}$$

af to reelle variable x og y.

(a) (3 point) Hvad er gradientvektoren $\nabla f(P)$ i punktet $P = (1,1)$?

- ☐ $\langle 0, 2e \rangle$
- ☐ $\langle 0, -2 \rangle$
- ☐ $\langle 2e^{-1}, 4e^{-1} \rangle$
- ☐ $\langle 2, 0 \rangle$
- ☐ $\langle e^{-2}, -e^{-2} \rangle$
- ☐ $\langle 0, 0 \rangle$

(b) (3 point) I hvilken af følgende retninger $\mathbf{u}$ er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ lig med nul for $P = (1,1)$?

- ☐ $\mathbf{u} = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$
- ☐ $\mathbf{u} = \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$
- ☐ $\mathbf{u} = \langle -1, 0 \rangle$
- ☐ $\mathbf{u} = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$
- ☐ $\mathbf{u} = \langle 0, 1 \rangle$
- ☐ Ingen af ovenstående

(c) (3 point) Hvilke punkter udgør de kritiske punkter for f?

- ☐ Alle punkter hvor enten $x = 0$ eller $y = 1$
- ☐ Punktet $(0, 0)$
- ☐ Linjerne $y = 1$ og $y = -1$
- ☐ Cirklen $x^2 + y^2 = 1$
- ☐ y-aksen
- ☐ Alle punkter
- ☐ Ingen punkter

(d) (3 point) Hvad er den maksimale værdi af f på cirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 1$?

☐ 1	☐ $\frac{1}{2}$	☐ $e^{\frac{1}{2}}$	☐ e^{-1}
☐ e^2	☐ e	☐ $\frac{2}{3}$	☐ $\ln(2)$

Opgave 8 (8 point)

Markér for hvert af nedenstående udsagn, om påstanden er sand eller falsk.

(a) (2 point) Den uendelige række

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)$$

er en alternerende række.

☐ Sandt ☐ Falsk

(b) (2 point) Den uendelige række

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

er absolut konvergent.

☐ Sandt ☐ Falsk

(c) (2 point) Differentialligningen

$$y' = yx^2 - y$$

er separabel.

☐ Sandt ☐ Falsk

(d) (2 point) Hvis en løsning til differentialligningen

$$y' = x - 3y$$

opfylder $y(2) = 1$, så er $y'(2) = -1$.

☐ Sandt ☐ Falsk

Opgave 9 (8 point)

(a) (4 point) Løsningerne til følgende komplekse andengradsligning

$$(1+i)z^2 - (4+6i)z + 3 + 9i = 0$$

er givet ved:

☐ $3i$ og 7 ☐ $3i$ og $2-i$

☐ $2+i$ og 3 ☐ Dobbeltroden $2+3i$

☐ $5+i$ og $4i$ ☐ Ingen af delene

(b) (4 point) Løsningerne til følgende komplekse binome ligning

$$z^4 = -4$$

er givet ved:

☐ $-1, -2, -3, -4$ ☐ $2+i, 2-i, -2+i, -2-i$

☐ $\pm 2i$ ☐ $1+i, 1-i, -1+i, -1-i$

☐ $1, -1, i, -i$ ☐ Ingen af delene

Opgave 10 (11 point)

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen

$$F(x,y,z) = x^2 + y^3 + xyz = 1.$$

(a) (2 point) Hvilket af de følgende punkter ligger på fladen $\mathcal{F}$?

☐ $(1,-1,-1)$ ☐ $(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ ☐ $(1,2,1)$
☐ $(1,1,2)$ ☐ $(1,-1,0)$ ☐ $(0,2,1)$

(b) (3 point) Hvilken af de følgende vektorer er normale til/står vinkelret på tangentplanen i punktet $P=(1,0,2)$ på fladen $\mathcal{F}$?

☐ $\langle 2,2,0\rangle$ ☐ $\langle 2,2,2\rangle$ ☐ $\langle -2,0,2\rangle$ ☐ $\langle 1,2,0\rangle$

(c) (3 point) Hvilken af de følgende ligninger beskriver tangentplanen til fladen $\mathcal{F}$ i $P=(1,0,2)$?

☐ $2x+2y+2z=1$ ☐ $x+y=1$ ☐ $x-y+z=2$
☐ $2x+y+z=3$ ☐ $x+y+z=0$ ☐ $x-y=-1$

(d) (3 point) Hvad er den partielle afledede $\partial z/\partial y$ i punktet $Q=(1,1,-1)$?

☐ 0 ☐ -1 ☐ 2
☐ 1 ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ -2

Opgave 11 (8 point)

(a) (2 point) Markér den rigtige påstand om følgende uendelige række:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^k.$$

☐ Rækken er divergent. ☐ Rækkens sum er $3,2$.
☐ Rækken er betinget konvergent. ☐ Rækkens sum er $\frac{4}{5}$.
☐ Rækkens sum er 20. ☐ Ingen af delene.

(b) (3 point) Markér Taylorrækken for $f(x)=xe^{2x}$ med udviklingspunktet $x=0$.

☐ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{xe^{2x}}{k!}$ ☐ $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^{k+1}}{k!}$ ☐ $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x)^k x^k}{k!}$
☐ $e^{2x}\sum_{k=1}^{\infty}x$ ☐ $\sum_{k=5}^{\infty}\frac{xe^x}{5}$ ☐ Ingen af delene

(c) (3 point) Funktionen $f(x)$ er defineret ved potensrækken

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (x-3)^k.$$

Angiv definitionsmængden for f.

- ☐ $]-1,3]$
- ☐ $]2,4[$
- ☐ $]-1,1[$
- ☐ $\{0\}$
- ☐ $[2,4[$
- ☐ Ingen af delene