

Eksamens i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design,
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet samt
Det Ingenør- og Naturvidenskabelige Fakultet

15. juni 2020

Dette eksamenssæt består af 9 nummererede sider med 11 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Opgave 1 (9 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x, y) = \ln(2x^2 + 2y^2),$$

hvor x og y er relle variable.

(a) (3 point) Definitionsmængden for f består af

- cirkelskiven med centrum i $(0, 0)$ og radius 1.
- alle punkter uden for cirkelskiven med centrum i $(0, 0)$ og radius 1.
- de punkter (x, y) hvor $x \geq 0$ og $y \geq 0$.
- de punkter (x, y) hvor $x > 0$ og $y > 0$.
- alle punkter i planen.
- alle punkter i planen undtagen punktet $(0, 0)$.
- ingen af ovenstående.

(b) (3 point) Hvilken af nedenstående svarmuligheder beskriver niveaukurven $f(x, y) = 0$?

- Parablen $y = x^2$
- Cirklen med centrum i $(0, 0)$ og radius 2
- Cirklen med centrum i $(0, 0)$ og radius $\frac{1}{2}$
- Cirklen med centrum i $(0, 0)$ og radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Alle punkter i planen
- Punktet $(0, 0)$
- Ingen af ovenstående

(c) (3 point) Hvilket af nedenstående funktionsudtryk angiver den anden ordens partielle afledede f_{xy} ?

- $\frac{1}{x^2+y^2}$
- $(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$
- $4xy \ln(2x^2 + 2y^2)$
- $-\frac{2xy}{3(x^2+y^2)}$
- $\frac{xy}{4(x^2+y^2)^2}$
- $-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$

Opgave 2 (8 point)

Tre komplekse tal er givet ved

$$z_1 = \frac{1-i}{1+3i}, \quad z_2 = (1+i)^4, \quad z_3 = e^{2+\frac{\pi}{2}i}.$$

(a) (2 point) Hvad er z_1 skrevet på standardform $(a+ib)$?

- | | | | |
|---|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> 2 - 2 <i>i</i> | <input type="checkbox"/> 1 - 3 <i>i</i> | <input type="checkbox"/> $\frac{3}{10} - \frac{1}{5}i$ | <input type="checkbox"/> $-\frac{1}{10} - \frac{1}{10}i$ |
| <input type="checkbox"/> $1 - \frac{1}{3}i$ | <input checked="" type="checkbox"/> $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ | <input type="checkbox"/> -2 - 4 <i>i</i> | <input type="checkbox"/> $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i$ |

(b) (2 point) Hvad er $|z_2|$?

- | | | | |
|----------------------------|---|---------------------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> $\sqrt{2}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 16 |
| <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | <input type="checkbox"/> $2\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> -4 |

(c) (2 point) Hvilket af følgende tal er et argument for z_2 ?

- | | | | |
|---|---|---|--|
| <input type="checkbox"/> $\frac{\pi}{8}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{\pi}{4}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{\pi}{2}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $-\pi$ |
| <input type="checkbox"/> $\frac{7\pi}{8}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{3\pi}{4}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{3\pi}{2}$ | <input type="checkbox"/> 0 |

(d) (2 point) Hvad er realdelen af z_3 ?

- | | | | |
|---------------------------------------|--|---------------------------------|-----------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> $\frac{\sqrt{2}e}{2}$ | <input type="checkbox"/> e | <input type="checkbox"/> e^{-2} |
| <input type="checkbox"/> e^2 | <input type="checkbox"/> $\frac{\pi}{2}$ | <input type="checkbox"/> $-e^2$ | <input type="checkbox"/> 2 |

Opgave 3 (9 point)

En kurve i planen er givet ved

$$x = t^2 + 1,$$
$$y = \frac{2}{3}t^3 - 3,$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (2 point) Hvad er kurvens hastighedsvektor?

- | | | | |
|---|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> $\langle t, \frac{2}{3}t^2 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 2t+1, 2t^2 \rangle$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\langle 2t, 2t^2 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 0, 4 \rangle$ |
| <input type="checkbox"/> $\langle 2t, \frac{2}{3}t^2 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle t+1, t^2 - 3 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 2t, 6t^2 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 2, 4t \rangle$ |

(b) (2 point) Hvad er kurvens accelerationsvektor for $t = \frac{1}{2}$?

- | | | | |
|---|---|--|---|
| <input type="checkbox"/> $\langle 0, 2 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 1, 4 \rangle$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\langle 2, 2 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 1, 2 \rangle$ |
| <input type="checkbox"/> $\langle 1, \frac{2}{3} \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 2, \frac{1}{3} \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 0, 4 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 1, \frac{1}{2} \rangle$ |

(c) (2 point) Hvad er kurvens fart?

- | | | | |
|--|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> $t + t^2$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{t^2 + t^4}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $2t\sqrt{1+t^2}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{t^2 + 4t^4}$ |
| <input type="checkbox"/> $4\sqrt{t^2 + t^4}$ | <input type="checkbox"/> $2t + 2t^2$ | <input type="checkbox"/> $4t + 4t^4$ | <input type="checkbox"/> $t\sqrt{1+t}$ |

(d) (3 point) Hvad er længden af kurven fra $t = 0$ til $t = 1$?

- | | | | |
|---|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$ | <input type="checkbox"/> $2\sqrt{2} - 1$ | <input type="checkbox"/> 1 |
| <input type="checkbox"/> $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> $\sqrt{2} - 1$ | <input type="checkbox"/> $\frac{2}{3}$ |

Opgave 4 (10 point)

(a) (4 point) En differentialligning af anden orden er givet ved

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk, hvori c_1 og c_2 er arbitrale konstanter. Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1e^{2t} + c_2$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1e^t \cos(2t) + c_2e^t \sin(2t)$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1e^t \cos(3t) + c_2e^t \sin(3t)$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $y(t) = c_1e^{-t} \cos(t) + c_2e^{-t} \sin(t)$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = c_1e^{2t} \cos(t) + c_2e^{2t} \sin(t)$ |

(b) (3 point) Betragt den inhomogene differentialligning

$$y'' + 2y' + 2y = 8t.$$

Hvilken af følgende funktioner er en partikulær løsning til denne ligning?

- | | | | |
|---|--|-----------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> $8t + \frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> $8t - 2$ | <input type="checkbox"/> $4t + 4$ | <input type="checkbox"/> $4t - 2$ |
| <input type="checkbox"/> $2t$ | <input checked="" type="checkbox"/> $4t - 4$ | <input type="checkbox"/> $2 - 2t$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{8}t + \frac{1}{4}$ |

(c) (3 point) Markér løsningen til begyndelsesværdiproblemet

$$y'' + 2y' + 2y = 8t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

blandt følgende muligheder:

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $y(t) = 4t + e^{2t}$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = 8t - 2 - 6e^{-t} \sin(2t)$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = 2t - 2e^{-t} - 2e^t$ | <input checked="" type="checkbox"/> $y(t) = 4t - 4 + 4e^{-t} \cos(t)$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = 8t - 2 + 2e^{-t}$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = 4 + 4t + 2e^{-t} \sin(t)$ |
| <input type="checkbox"/> $y(t) = 4 - 4t - 4e^{-t}$ | <input type="checkbox"/> $y(t) = 2t + 2e^t \cos(t) - e^t \sin(t)$ |

Opgave 5 (7 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x) = \cos(e^{2x} - 1)$$

for alle reelle tal x .

(a) (3 point) Hvad er den anden afledeede $f''(x)$?

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $-2 \cos(e^{2x} - 1)$ | <input type="checkbox"/> $-6e^{2x} \cos(e^{2x} - 1) - 8e^{2x} \sin(e^{2x} - 1)$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $-4e^{4x} \cos(e^{2x} - 1) - 4e^{2x} \sin(e^{2x} - 1)$ | <input type="checkbox"/> $3e^{4x} \cos(e^{2x} - 1) + 3e^{2x} \sin(e^{2x} - 1)$ |
| <input type="checkbox"/> $e^{2x} \cos(e^{2x} - 1) + e^{2x} \sin(e^{2x} - 1)$ | <input type="checkbox"/> $-4e^{2x} \sin(e^{2x} - 1)$ |

(b) (4 point) Hvilket af nedenstående polynomier er Taylor-polynomiet af anden orden for f med udviklingspunkt $x = 0$?

- | | | |
|---------------------------------------|--|---|
| <input type="checkbox"/> $1 - x^2$ | <input type="checkbox"/> $1 - 4x^2$ | <input type="checkbox"/> $1 - x + 2x^2$ |
| <input type="checkbox"/> $-2x - 2x^2$ | <input checked="" type="checkbox"/> $1 - 2x^2$ | <input type="checkbox"/> $1 + x - \frac{1}{2}x^2$ |

Opgave 6 (12 point)

Et område \mathcal{R} i planen udgør en trekant med hjørner i $(0, 0)$, $(1, 1)$ og $(1, -1)$.

(a) (4 point) Hvilket af følgende par af uligheder beskriver de punkter (x, y) der tilhører \mathcal{R} ?

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $0 \leq y \leq 1, -y \leq x \leq y$ | <input type="checkbox"/> $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$ |
| <input type="checkbox"/> $-1 \leq y \leq 1, -y \leq x \leq y$ | <input type="checkbox"/> $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x$ | <input type="checkbox"/> Ingen af ovenstående |

(b) (4 point) Hvad er volumen af området der ligger over trekanten \mathcal{R} i xy -planen og under grafen for funktionen $f(x, y) = x^4 + 3y^2$?

- | | | | |
|---|--|--|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{5}{6}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{2}{3}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> 1 |
| <input type="checkbox"/> $\frac{1}{3}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{5}$ | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> $\frac{4}{3}$ |

(c) (4 point) Hvad er massen af området der ligger over trekanten \mathcal{R} i xy -planen og under planen $z = x + y$ når massetætheden (densiteten) er $\delta(x, y, z) = z$?

- | | | | |
|---|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> $\frac{1}{12}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{1}{3}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{7}{6}$ | <input type="checkbox"/> 1 |
| <input type="checkbox"/> $\frac{5}{6}$ | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{5}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{2}{3}$ |

Opgave 7 (12 point)

Betrægt funktionen

$$f(x, y) = e^{x^2(1-y^2)}$$

af to reelle variable x og y .

(a) (3 point) Hvad er gradientvektoren $\nabla f(P)$ i punktet $P = (1, 1)$?

- | | | |
|--|---|---|
| <input type="checkbox"/> $\langle 0, 2e \rangle$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\langle 0, -2 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 2e^{-1}, 4e^{-1} \rangle$ |
| <input type="checkbox"/> $\langle 2, 0 \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle e^{-2}, -e^{-2} \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\langle 0, 0 \rangle$ |

(b) (3 point) I hvilken af følgende retninger \mathbf{u} er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ lig med nul for $P = (1, 1)$?

- | | | |
|---|---|--|
| <input type="checkbox"/> $\mathbf{u} = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\mathbf{u} = \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\mathbf{u} = \langle -1, 0 \rangle$ |
| <input type="checkbox"/> $\mathbf{u} = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$ | <input type="checkbox"/> $\mathbf{u} = \langle 0, 1 \rangle$ | <input type="checkbox"/> Ingen af ovenstående |

(c) (3 point) Hvilke punkter udgør de kritiske punkter for f ?

- Alle punkter hvor enten $x = 0$ eller $y = 1$
- Punktet $(0, 0)$
- Linjerne $y = 1$ og $y = -1$
- Cirklen $x^2 + y^2 = 1$
- y -aksen
- Alle punkter
- Ingen punkter

(d) (3 point) Hvad er den maksimale værdi af f på cirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 1$?

- 1
- $\frac{1}{2}$
- $e^{\frac{1}{2}}$
- e^{-1}
- e^2
- e
- $\frac{2}{3}$
- $\ln(2)$

Opgave 8 (8 point)

Markér for hvert af nedenstående udsagn, om påstanden er sand eller falsk.

(a) (2 point) En cirkel med radius 2 har krumning 2 i alle punkter.

- Sandt
- Falsk

(b) (2 point) Funktionen $\arctan(x)$ er en stamfunktion til $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- Sandt
- Falsk

(c) (2 point) Differentialligningen

$$y' = yx^2 - y$$

er separabel.

- Sandt
- Falsk

(d) (2 point) Hvis en løsning til differentialligningen

$$y' = x - 3y$$

opfylder $y(2) = 1$, så er $y'(2) = -1$.

- Sandt Falsk

Opgave 9 (8 point)

Et område \mathcal{R} i planen er beskrevet i polære koordinater ved ulighederne

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \cos \theta.$$

(a) (3 point) Hvilken af nedenstående svarmuligheder beskriver \mathcal{R} ?

- En cirkelskive med centrum i $(1, 0)$ og radius 1
 En halvcirkelskive i højre halvplan med centrum i $(0, 0)$ og radius 1
 En cirkelskive med centrum i $(\frac{1}{2}, 0)$ og radius $\frac{1}{2}$
 En cirkelskive med centrum i $(0, 1)$ og radius 1
 En cirkelskive med centrum i $(0, \frac{1}{2})$ og radius $\frac{1}{2}$
 Ingen af ovenstående

(b) (3 point) En tynd plade \mathcal{P} dækker området \mathcal{R} i planen. Pladen har massæthed (densitet) $\delta(x, y) = x(x^2 + y^2)$. Hvad er massætheden i polære koordinater?

- $r^2 \sin \theta$ $r^3 \sin \theta$ r^2
 $r^2 \cos \theta$ $r^3 \cos \theta$ r^3

(c) (2 point) Hvilket af nedenstående integraler angiver massen af pladen \mathcal{P} ?

- $\frac{1}{5} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6(\theta) d\theta$ $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos(\theta)} r^3 \cos(\theta) dr d\theta$
 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos(\theta)} r^3 \sin(\theta) dr d\theta$ $\frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(\theta) \sin(\theta) d\theta$
 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos(\theta)} r^4 dr d\theta$ $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \cos(\theta) dr d\theta$

Opgave 10 (11 point)

En flade \mathcal{F} i rummet er bestemt ved ligningen

$$F(x, y, z) = x^2 + y^3 + xyz = 1.$$

(a) (2 point) Hvilket af de følgende punkter ligger på fladen \mathcal{F} ?

- (1, -1, -1) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (1, 2, 1)
 (1, 1, 2) (1, -1, 0) (0, 2, 1)

(b) (3 point) Hvilken af de følgende vektorer er normale til/står vinkelret på tangentplanen i punktet $P = (1, 0, 2)$ på fladen \mathcal{F} ?

- $\langle 2, 2, 0 \rangle$ $\langle 2, 2, 2 \rangle$ $\langle -2, 0, 2 \rangle$ $\langle 1, 2, 0 \rangle$

(c) (3 point) Hvilken af de følgende ligninger beskriver tangentplanen til fladen \mathcal{F} i $P = (1, 0, 2)$?

- $2x + 2y + 2z = 1$ $x + y = 1$ $x - y + z = 2$
 $2x + y + z = 3$ $x + y + z = 0$ $x - y = -1$

(d) (3 point) Hvad er den partielle afledede $\partial z / \partial y$ i punktet $Q = (1, 1, -1)$?

- 0 -1 2
 1 $-\frac{1}{2}$ -2

Opgave 11 (6 point)

En plan kurve er givet ved

$$x = t + 1,$$
$$y = \frac{1}{2}t^2,$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (3 point) Hvad er kurvens krumning når $t = \sqrt{3}$?

- $\frac{1}{4}$ $\sqrt{2}$ $3\sqrt{3}$ 2
 8 $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(b) (3 point) For hvilket t er kurvens krumning størst mulig?

- $t = -1$ $t = 0$ $t = \frac{1}{2}$ $t = 2$
 $t = -\frac{1}{2}$ $t = \frac{1}{4}$ $t = 1$ $t = 8$