To find the English version of the exam, please read from the other end!

Se venligst bort fra den engelske version på bagsiden hvis du følger denne danske version af prøven.

Eksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design, det Sundhedsvidenskabelig Fakultet samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

12. juni 2017, 9:00 – 13:00

Dette eksamenssæt består af 9 nummererede sider med 14 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point.
Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv.
Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i dette opgavesæt.
Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger.
Opgaverne evalueres efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning i en (del)opgave ophæver én korrekt afkrydsning.

Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.
Du bedes også afkrydset det hold som du deltager i.

Held og lykke!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

- ☐ Hold 1: LAND – ST — Horia Cornean
- ☐ Hold 3: MAT – MAOK – MATTEK — Nikolaj Hess-Nielsen
- ☐ Hold L (København) — Iver Ottosen
- ☐ Hold BBT (København) — Bedia Møller

Opgave 1 (8 point)

En kurve i planen er givet ved

$$x = e^t,$$
$$y = \ln t,$$

hvor parameteren t gennemløber de positive reelle tal.

(a) (2 point) For hvilken parameter t går kurven gennem punktet $P = (e, 0)$?

☐ -1 ☐ 0 ☐ 1 ☐ e

(b) (2 point) Hvilken af de følgende vektorer er kurvens hastighedsvektor i P?

☐ $\begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} e \\ -e \end{bmatrix}$

(c) (4 point) Hvilket af de følgende tal er lig med kurvens krumning $\kappa(P)$ i P?

☐ $\frac{2e}{e^2+1}$ ☐ $\frac{2e}{\sqrt{e^2+1}}$ ☐ $\frac{2e}{\sqrt{e^2+1}^3}$ ☐ $\frac{e}{\sqrt{e^2+1}^3}$ ☐ 0

Opgave 2 (7 point)

Funktionen f er defineret ved

$$f(x, y) = x^2 e^{-y}.$$

Den bestemmer en flade ved $z = f(x, y)$, som indeholder punktet
$P = (1, -1, e)$.

(a) (4 point) Tangentplanen for fladen i punktet P er bestemt ved en eller flere af de følgende ligninger. Hvilke(n)?

☐ $2e(x-1) - e(y+1) = z - e$ ☐ $z = 2x$

☐ $2(x-1) - (y+1) = z - e$ ☐ $z = e(2x - y - 2)$

☐ $2e(x-1) - e(y-1) = z + e$ ☐ $z = 2x - y - 2$

(b) (3 point) Hvilken af følgende udtryk svarer til den anden ordens partielle afledede $f_{xy}(x, y)$?

☐ $2e^{-y}$ ☐ $x^2 e^{-y}$ ☐ $-2xe^{-y}$ ☐ $-\frac{x^3}{3} e^{-y}$

Opgave 3 (6 point)

En kurve i rummet er givet ved

$$x = \ln(t),$$
$$y = \sqrt{2}\, t,$$
$$z = \frac{1}{2}t^2,$$

hvor parameteren t gennemløber de positive reelle tal.

(a) (3 point) Markér det korrekte udtryk for farten $v(t)$.

☐ $\sqrt{t^2+1}$ ☐ $\sqrt{\frac{t^2+1}{t}}$ ☐ $t+\frac{1}{t}$ ☐ $\sqrt{t^4+2t+1}$

(b) (3 point) Hvad er buelængden af kurven fra $t = 1$ til $t = e$?

☐ $e+\frac{1}{e}-2$ ☐ $\frac{1}{2}(e^2+1)$ ☐ $\frac{e^2}{2}+1$ ☐ $e-\frac{1}{e^2}$ ☐ $\ln(2)+1$

Opgave 4 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x) = \sin(x^2)$$

for en reel parameter x.

(a) (2 point) Hvad er differentialkvotienten $f'(x)$?

☐ $\cos(x^2)$ ☐ $2x\sin(x^2)$ ☐ $\frac{x^3}{3}\cos(x^2)$

☐ $2x\cos(2x)$ ☐ $2x\cos(x^2)$ ☐ $-2x\cos(2x)$

(b) (4 point) Et af de følgende polynomier er anden ordens Taylor polynomiet for funktionen f med udviklingspunkt $x = 0$. Hvilket?

☐ x^2-x ☐ x^2 ☐ $1+x^2$ ☐ $2x+x^2$ ☐ $\frac{x^2}{2}$

Opgave 5 (7 point)

Et komplekst tal er givet ved $z = 1 + \sqrt{3}i$.

(a) (3 point) Hvad er $\bar{z}$ (z konjugeret) skrevet på polær form?

☐ $2e^{-\frac{\pi i}{3}}$ ☐ $e^{\frac{\pi i}{4}}$ ☐ $\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi i}{3}}$ ☐ $2e^{\frac{\pi i}{3}}$ ☐ $2e^{-\frac{\pi i}{6}}$

(b) (4 point) Hvad er z^3 skrevet på standard form?

☐ -2 ☐ 8 ☐ $1 - 3\sqrt{3}i$

☐ -8 ☐ $8i$ ☐ $-1 - \sqrt{3}i$

Opgave 6 (9 point)

Et komplekst tal z kaldes *rent imaginær* hvis det ligger på den imaginære akse, dvs. hvis det er på formen $z = iy$ for et reelt tal y.

(a) (3 point) For nogle komplekse tal z gælder det, at z^2 er rent imaginær. Hvilke af nedenstående beskriver netop alle disse tal?

☐ z rent imaginær ☐ $z = x(1 \pm i),\ x$ reel

☐ alle komplekse tal ☐ $z = x(1 \pm i),\ x \geq 0$

☐ z på formen $x(1 + i),\ x$ reel ☐ $z = x(1 - i),\ x$ reel

(b) (3 point) For nogle komplekse tal z gælder det, at $z\bar{z}$ er reel. Hvilke af nedenstående beskriver netop alle disse tal?

☐ alle reelle tal ☐ alle komplekse tal

☐ alle rent imaginære tal ☐ z på formen $z = x(1 + i), x$ reel

(c) (3 point) For nogle komplekse tal z gælder det, at $\frac{\bar{z}}{z}$ er reel. Hvilke af nedenstående beskriver netop alle disse tal?

☐ alle tal som er reelle eller rent imaginære på nær 0 ☐ alle komplekse tal

☐ alle reelle tal ☐ z på formen $z = x(1 - i), x$ reel

☐ alle rent imaginære tal ☐ $z = x(1 + i), x$ reel

Opgave 7 (9 point)

En homogen anden ordens differentialligning er givet ved

$$y'' - 4y' + 8y = 0.$$

(a) (3 point) I den efterfølgende liste findes en række funktionsudtryk hvori der indgår arbitrære konstanter c_1 og c_2. Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

- ☐ $y(t) = c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t)$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{2t} \cos(2t) + c_2 e^{2t} \sin(2t)$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-2t} \cos(2t) + c_2 e^{-2t} \sin(2t)$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{2t} \cos(-2t) + c_2 e^{2t} \sin(-2t)$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{t^2} \cos(t^2) + c_2 e^{t^2} \sin(t^2)$

(b) (3 point) Hvilken af de følgende funktionsudtryk løser differentialligningen med begyndelsesbetingelserne $y(0) = 2, y'(0) = 6$?

- ☐ $e^{2t} + e^{-2t}$
- ☐ $e^{2t} - te^{-2t}$
- ☐ $e^{2t} \cos(2t) + 2e^{2t} \sin(2t)$
- ☐ $e^{2t} \cos(2t) + e^{2t} \sin(2t)$
- ☐ $2e^{-2t} \cos(2t) + e^{-2t} \sin(2t)$
- ☐ $e^{2t} \cos(-2t) + e^{2t} \sin(-2t)$
- ☐ $\frac{1}{2}e^{2t} \cos(2t) - \frac{1}{2}e^{2t} \sin(2t)$
- ☐ ingen af dem

(c) (3 point) Hvilke af de følgende funktionsudtryk er en (partikulær) løsning til den inhomogene differentialligning

$$y'' - 4y' + 8y = t^2?$$

- ☐ $t^3 + \frac{1}{2}t$
- ☐ $t^2 - 4t + 8$
- ☐ $\frac{t^2}{8} + \frac{t}{8} + \frac{1}{32}$
- ☐ $t + \frac{1}{8}$
- ☐ $\frac{t^2}{8} - \frac{t}{8} - \frac{1}{32}$
- ☐ $t^2 + t - \frac{1}{8}$

Opgave 8 (9 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

Det oplyses at grafen for funktionen danner en opadgående skål mod ∞ (åbner sig opad).

(a) (3 point) Hvilke af de følgende er kritiske punkter for funktionen f?

☐ $(0,0)$	☐ $(-1,1)$	☐ $(1,1)$
☐ $(-1,-1)$	☐ $(1,-1)$	☐ $(2,3)$

(b) (3 point) Hvilket af de følgende tal er den mindste værdi som funktionen f antager?

☐ -3	☐ -2	☐ 1
☐ -1	☐ 0	☐ intet af dem

(c) (3 point) Antager funktionen et lokalt maksimum i Origo $(0,0)$?

☐ Ja ☐ Nej

Opgave 9 (6 point)

Et område $\mathcal{T}$ i rummet består af alle punkter (x,y,z) hvis koordinater opfylder de tre uligheder

$$0 \le x \le 1, \quad -x^2 \le y \le x^2, \quad 0 \le z \le x^2 + y^2.$$

Et legeme med massetæthed (densitet) $\delta(x,y,z) = 2 - z$, rumfang (volumen) V og masse m dækker netop området $\mathcal{T}$.
Markér samtlige korrekte udtryk nedenfor.

☐ $V = \int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} \int_0^{x^2+y^2} dzdydx.$

☐ $V = \int_0^1 \int_{\sqrt{|y|}}^{1} \int_0^{x^2+y^2} dzdxdy.$

☐ $V = \int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} \int_0^{x^2+y^2} dzdxdy.$

☐ $m = \int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} \int_0^{x^2+y^2} (2-z)dzdydx.$

☐ $m = \int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} \int_0^{x^2+y^2} (2-z)(x^2+y^2)dzdydx.$

Opgave 10 (6 point)

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af alle punkter (x, y) hvis koordinater opfylder de to uligheder

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq y.$$

Markér værdien af planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dA.$$

☐ 6π	☐ $\frac{3}{2}$	☐ 1	☐ 3
☐ π	☐ 0	☐ 2	☐ $-\pi$

Opgave 11 (7 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x, y) = (x + y)e^{x^2 - y^2}.$$

(a) (3 point) Hvilket af de følgende tal er lig med den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (1, 1)$ og retningen bestemt ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = 0.8\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j} = (0.8, 0.6)$?

☐ -0.6	☐ 0.6	☐ 5.8
☐ -0.4	☐ 0	☐ 2.2

(b) (4 point) Hver af de følgende vektorer $\mathbf{v}$ bestemmer en enhedsvektor $\mathbf{u}$ som peger i samme retning som $\mathbf{v}$. Markér alle vektorer i listen for hvilke det gælder, at $D_{\mathbf{u}}f(P) = 0$.

☐ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$	☐ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$	☐ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1 \end{bmatrix}$
☐ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}$	☐ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$	☐ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

Opgave 12 (7 point)

En funktion er givet ved
$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

(a) (2 point) Funktionen f har en definitionsmængde. Afkryds hvis den består af samtlige punkter, der opfylder

- ☐ $x \neq -y$
- ☐ $x = y = 0$
- ☐ $x \geq 0$ og $y \geq 0$
- ☐ $x \neq 0$ eller $y \neq 0$
- ☐ $x \neq 0$ og $y \neq 0$
- ☐ $x \neq 0$

(b) (3 point) Hvilken af de følgende beskrivelser svarer til niveaukurven med ligningen $f(x,y) = \frac{1}{4}$?

☐ En cirkel med centrum i $(1,0)$ og radius 1.

☐ En ret linje gennem $(0,0)$ med hældningskoefficient $\sqrt{3}$.

☐ To rette linjer gennem $(0,0)$ med hældningskoefficienter $\pm\sqrt{3}$.

☐ To rette linjer gennem $(0,0)$ med hældningskoefficienter $\pm\sqrt{3}$ – på nær Origo.

☐ En ret linje gennem $(0,0)$ med hældningskoefficient $\sqrt{3}$ – på nær Origo.

☐ To rette linjer gennem $(0,0)$ med hældningskoefficienter $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ – på nær Origo.

(c) (2 point) Hvad svarer niveaukurven $f(x,y) = 4$ til?

- ☐ en ellipse
- ☐ punktet Origo
- ☐ en hyperbel
- ☐ den tomme mængde
- ☐ to rette linjer
- ☐ en parabel

Opgave 13 (6 point)

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen

$$F(x,y,z) = 2xy + 3xz - yz = 2.$$

Nogle af ligningerne nedenfor beskriver tangentplanen for fladen $\mathcal{F}$ i punktet $P = (1,-1,1)$. Hvilke?

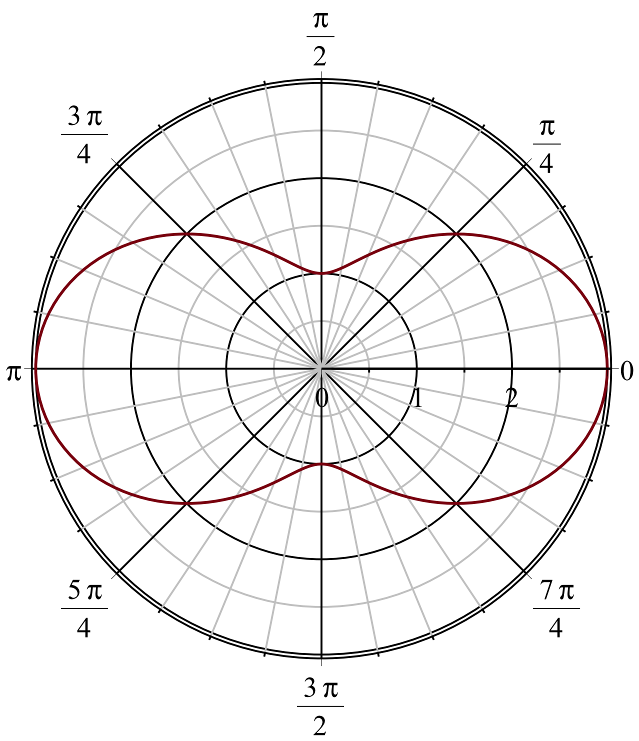
- ☐ $2x + 3y - z = 2$
- ☐ $2z + 3y - x = 2$
- ☐ $x + y + 4z = 4$
- ☐ $x - y + 4z = 6$
- ☐ $-x - y - 4z = -4$
- ☐ $x - y + z = 3$
- ☐ $2x + 2y + 8z = 8$
- ☐ $x + y + 4z = 8$

Opgave 14 (7 point)

Figuren nedenfor viser grafen for en funktion

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



En af forskrifterne for f i listen nedenfor svarer til figuren. Hvilken?

- ☐ $f(\theta) = 1 + \cos(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 2 + \sin(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 2 + \cos(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 2 + \sin(2\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 2 + \cos(2\theta)$
- ☐ $f(\theta) = (1 - \sin(\theta))^2$