Eksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

5. januar 2018

Dette eksamenssæt består af 8 nummererede sider med 12 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger. Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

Held og lykke!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

Opgave 1 (9 point)

(a) (5 point). En anden ordens differentialligning er givet ved

$$y'' + 4y' + 29y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk, hvori c_1 og c_2 er arbitrære konstanter. Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

- ☐ $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{5t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-2t} \cos(5t) + c_2 e^{-2t} \sin(5t)$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-t} \cos(4t) + c_2 e^{-t} \sin(4t)$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{2t} \cos(3t) + c_2 e^{2t} \sin(3t)$

(b) (4 point). Betragt nu den inhomogene ligning

$$y'' + 4y' + 29y = 13e^{-3t}.$$

Hvilken af følgende funktioner er en partikulær løsning til ligningen?

☐ $t^2 + e^{-3t+1}$	☐ $2e^{3t}$	☐ $\frac{1}{3}e^{3t}$	☐ $\frac{1}{2}e^{-3t}$
☐ $2e^{-3t}$	☐ $\frac{1}{4}e^{-3t}$	☐ $\frac{1}{9}e^{t} + e^{-t}$	☐ $\frac{2}{3}e^{-3t+1}$

Opgave 2 (6 point)

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = x^3 - y^3 + 2z^3 - 9.$$

Fladen $\mathcal{F}$ har en tangentplan i punktet $P = (2, 1, 1)$. Markér en ligning for denne tangentplan blandt følgende muligheder:

- ☐ $3x - 3y + 12z = 15$
- ☐ $x - 2y + z = 1$
- ☐ $9x + y + 6z = 25$
- ☐ $12x - 3y + 6z = 27$
- ☐ $2x - 2y + 7z = 5$
- ☐ $-3x + 2y + 6z = 11$
- ☐ $x - 2y - z = 1$
- ☐ $x - 3y + 5z = -3$

Opgave 3 (10 point)

En plan kurve er givet ved

$$x = t - 2t^2,$$
$$y = 2t + t^2,$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (2 point). Hvilket punkt på kurven svarer til parameterværdien $t = 1$?

☐ $(1, 4)$	☐ $(-1, 1)$	☐ $(-1, 2)$	☐ $(3, 4)$
☐ $(-1, 3)$	☐ $(5, 4)$	☐ $(-3, 4)$	☐ $(-5, 4)$

(b) (4 point). Hvad er kurvens krumning for $t = 1$?

☐ $\frac{\sqrt{2}}{4}$	☐ $\frac{\sqrt{3}}{4}$	☐ $\frac{2}{25}$	☐ 5
☐ $\frac{1}{2}$	☐ $\sqrt{3}$	☐ $\frac{1}{9}$	☐ $\sqrt{11}$

(c) (4 point). For hvilken værdi af parameteren t er krumningen maksimal?

☐ -2	☐ 0	☐ 3	☐ 5
☐ $-\frac{1}{2}$	☐ $\frac{3}{2}$	☐ $\frac{7}{2}$	☐ 9

Opgave 4 (7 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x) = \big(4x+1\big)^{\frac{1}{2}}.$$

(a) (3 point). Hvad er den dobbelt afledede $f''(x)$?

☐ $\big(4x+1\big)^{-\frac{1}{2}}$ ☐ $2x^{-\frac{1}{2}}$ ☐ $\frac{1}{4}\big(4x+1\big)^{\frac{1}{2}}$

☐ $-\frac{1}{4}\big(4x+1\big)^{-\frac{3}{2}}$ ☐ $6x^{-\frac{3}{2}}$ ☐ $-4\big(4x+1\big)^{-\frac{3}{2}}$

(b) (4 point). Hvilket af nedenstående polynomier er tredje ordens Taylor polynomiet for f med udviklingspunkt $x = 0$?

☐ $1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ ☐ $1 - \frac{1}{2}x^3$ ☐ $2 + 4x^2 - \frac{1}{2}x^3$

☐ $1 - x + x^2 - 6x^3$ ☐ $1 + 3x + x^2 + 2x^3$ ☐ $1 + 2x - 2x^2 + 4x^3$

Opgave 5 (10 point)

En partikkel bevæger sig langs en kurve i rummet. Positionsvektoren for partiklen til tiden t er

$$\mathbf{r}(t) = \langle e^t,\, e^{-t},\, \sqrt{2}\,t\rangle.$$

(a) (3 point). Hvad er hastighedsvektoren $\mathbf{v}(t)$?

☐ $\langle e^t,\, -e^{-t},\, \frac{1}{2\sqrt{2}}t\rangle$ ☐ $\langle te^{t-1},\, -te^{-t-1},\, 0\rangle$

☐ $\langle e^t,\, e^{-t}, 1\,\rangle$ ☐ $\langle e^t,\, -e^{-t},\, \sqrt{2}\rangle$

☐ $\langle e^t,\, -e^{-t}, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2\,\rangle$ ☐ $\langle e^t,\, e^{-t},\, t\rangle$

(b) (4 point). Hvad er farten $v(t)$?

☐ $e^t + e^{-t}$ ☐ $\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + \frac{1}{8}t}$

☐ $e^t + e^{-t} + \sqrt{2}$ ☐ $2e^{2t} + 2t$

☐ $\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + t^2}$ ☐ $\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2t^2}$

(c) (3 point). Partiklen gennemløber et stykke af bevægelseskurven i tidsrummet $0 \leq t \leq 1$. Hvad er buelængden af dette kurvestyke?

☐ e^2 ☐ $e - e^{-1}$

☐ $2e + 1$ ☐ $e - e^{-1} + \sqrt{2}$

☐ $\sqrt{2}$ ☐ $3\ln(2)$

Opgave 6 (6 point)

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = \frac{1+i}{3-2i} \quad , \quad z_2 = \frac{2i}{1+i}$$

(a) (3 point). Hvad er z_1 skrevet på standard form?

- ☐ $2+3i$
- ☐ $\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$
- ☐ $8i$
- ☐ $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$
- ☐ $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$
- ☐ $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}i$
- ☐ -5
- ☐ $-2-i$

(b) (3 point). Hvad er z_2 skrevet på polær form?

- ☐ $2e^{i\pi/3}$
- ☐ $2e^{i\pi}$
- ☐ $2e^{i\pi/2}$
- ☐ $\sqrt{6}e^{i\pi/4}$
- ☐ $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$
- ☐ $\sqrt{2}e^{-i\pi/3}$
- ☐ $\frac{1}{2}e^{-i\pi}$
- ☐ $5e^{3i\pi/4}$

Opgave 7 (8 point)

En funktion er givet ved

$$f(x,y) = \frac{4x - 2y^2 - 3}{x^2 - y^2}.$$

Afkryds den rigtige mulighed i hvert delspørgsmål herunder.

(a) (4 point). Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x,y), der opfylder

- ☐ $x > 0$ og $y > 0$
- ☐ $y \neq x$ og $y \neq -x$
- ☐ $x > y$
- ☐ $x \neq 0$ og $y \neq 0$
- ☐ $4x + 5 \geq 0$
- ☐ $x \neq 0$ eller $y \neq 0$

(b) (4 point). Niveaukurven med ligning $f(x,y) = 1$ kan beskrives som:

- ☐ En parabel med ligning $y = 2x^2 + \frac{5}{2}$.
- ☐ En parabel med ligning $y = x^2 - 2x + 4$.
- ☐ En ret linje gennem $(0,5)$ med hældningskoefficienten 4.
- ☐ En ret linje gennem $(0,2)$ med hældningskoefficienten 2.
- ☐ En cirkel med centrum i $(-2,1)$ og radius $\frac{1}{2}$.
- ☐ En cirkel med centrum i $(2,0)$ og radius 1.

Opgave 8 (14 point)

En funktion er defineret som

$$f(x,y) = xy^2 - 6x^2 - 3y^2.$$

(a) (2 point). Hvad er funktionsværdien $f(1,1)$?

- ☐ -10
- ☐ 0
- ☐ 3
- ☐ 7
- ☐ -8
- ☐ 2
- ☐ 5
- ☐ 11

(b) (4 point). Hvilke af følgende punkter er kritiske punkter for f? (*Bemærk*: Hver forkert afkrydsning i dette spørgsmål ophæver én rigtig afkrydsning.)

- ☐ $(0,0)$
- ☐ $(-1,1)$
- ☐ $(2,3)$
- ☐ $(4,2)$
- ☐ $(1,1)$
- ☐ $(3,6)$
- ☐ $(3,-6)$
- ☐ $(4,-16)$

(c) (4 point). Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (-1,1)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\langle 1,1\rangle$?

- ☐ $2\sqrt{2}$
- ☐ $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- ☐ 8
- ☐ $\frac{\sqrt{6}}{2}$
- ☐ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
- ☐ $10\sqrt{2}$
- ☐ -7
- ☐ $\frac{1}{3}$

(d) (4 point). Hvilken af følgende ligninger er en ligning for tangentplanen til grafen for f i punktet $Q = (1,1,f(1,1))$?

- ☐ $x + 2y - z = 11$
- ☐ $11x + 4y + z = 7$
- ☐ $2x - 3y + z = -9$
- ☐ $x + y - z = 1$
- ☐ $9x + 10y - z = 13$
- ☐ $10x + y + z = 3$

Opgave 9 (5 point)

Lad

$$g(x,y,z) = \arctan(x^2 + y^2 - z^2).$$

I hvilken retning ud fra punktet $P = (1,-1,1)$ er den retningsafledede af funktionen g størst? Markér en enhedsvektor herunder, som peger i denne retning.

- ☐ $\frac{\sqrt{3}}{3}\langle 1,-1,-1\rangle$
- ☐ $\frac{1}{3}\langle 2,2,1\rangle$
- ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}\langle 1,1,0\rangle$
- ☐ $\frac{1}{3}\langle -2,1,2\rangle$
- ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}\langle -1,0,1\rangle$
- ☐ $\frac{1}{5}\langle 3,-4,0\rangle$

Opgave 10 (10 point)

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x, \quad 0 \leq y, \quad x^2 + y^2 \leq 16.$$

Markér værdien af planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} x\sqrt{x^2 + y^2}\, dA.$$

☐ $\frac{5}{4}$	☐ $\frac{55}{4}$	☐ 8	☐ 64	☐ 91
☐ $\frac{5}{2}$	☐ $\frac{47}{2}$	☐ 55	☐ 72	☐ 121

Opgave 11 (10 point)

Et område $\mathcal{T}$ i rummet består af de punkter (x, y, z), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 5 - xy.$$

Et legeme med massefylde (densitet) $\delta(x, y, z) = x$ dækker netop området $\mathcal{T}$.

(a) (5 point). Hvad er rumfanget (volumen) af $\mathcal{T}$?

☐ $\frac{1}{3}$	☐ $\frac{3}{2}$	☐ $\frac{22}{3}$	☐ 3	☐ 9
☐ $\frac{1}{2}$	☐ $\frac{7}{2}$	☐ 2	☐ 5	☐ 11

(b) (5 point). Hvad er massen af legemet, der dækker $\mathcal{T}$?

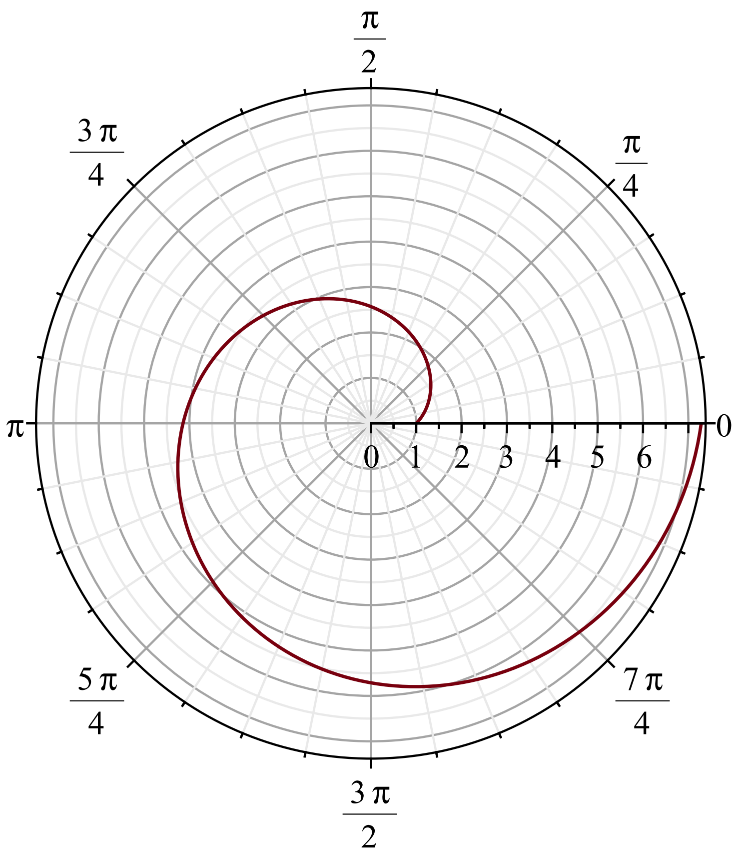
☐ $\frac{13}{3}$	☐ $\frac{15}{2}$	☐ 3	☐ 5	☐ 10π
☐ $\frac{11}{2}$	☐ 2	☐ 4	☐ 8	☐ $\frac{4\pi}{7}$

Opgave 12 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f svarer til figuren?

- ☐ $f(\theta) = 1 + \sin\theta$
- ☐ $f(\theta) = \sin(2\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \theta$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \cos\theta$
- ☐ $f(\theta) = 1 - 2\sin\theta$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \theta^2$