Facit

Eksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet og Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

6. juni 2016

Dette eksamenssæt består af 10 nummererede sider med 14 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger. Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

Held og lykke!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

Opgave 1 (7 point)

Betragt differentialligningen

$$y'' + 2y' + 26y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk, hvori der indgår to arbitrære konstanter c_1 og c_2. Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

- ☐ $y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}$
- ☐ $y(t) = c_1e^{3t}\cos(t) + c_2e^{3t}\sin(t)$
- ☐ $y(t) = c_1e^{t} + c_2e^{3t}$
- ☐ $y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$
- ☒ $y(t) = c_1e^{-t}\cos(5t) + c_2e^{-t}\sin(5t)$
- ☐ $y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$
- ☐ $y(t) = c_1e^{2t}\cos(26t) + c_2e^{2t}\sin(26t)$
- ☐ $y(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{-2t}$
- ☐ $y(t) = c_1e^{t}\cos(3t) + c_2e^{t}\sin(3t)$
- ☐ $y(t) = c_1e^{-t}\cos(2\pi t) + c_2e^{-t}\sin(2\pi t)$

Opgave 2 (7 point)

Det oplyses, at den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 2y' + y = 0$$

kan angives som

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t,$$

hvor c_1 og c_2 er arbitrære konstanter.

(a) (1 point). Markér det korrekte udtryk for $y(0)$ herunder

☐ $c_1 + c_2$ ☐ $c_1 - c_2$ ☒ c_1 ☐ $2c_1$ ☐ 0

(b) (3 point). Markér det korrekte udtryk for $y'(0)$ herunder

☐ c_1 ☒ $c_1 + c_2$ ☐ c_2 ☐ $c_1 + 2c_2$ ☐ $c_1 - 2c_2$

(c) (3 point). Begyndelsesværdiproblemet

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$$

har en entydig løsning $y(t)$. Find denne løsning og angiv herefter funktionsværdien $y(1)$ nedenfor.

☐ 5 ☐ $5e$ ☐ $-3e$ ☐ 4 ☒ $4e$

Opgave 3 (7 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x) = x\cos(x).$$

(a) (3 point). Hvad giver den dobbelt afledede $f''(x)$?

- [x] $-2\sin(x) - x\cos(x)$
- [ ] $-\sin(x)$
- [ ] $\cos(x) - \sin(x)$
- [ ] 0
- [ ] $\sin(x) - x\cos(x)$
- [ ] $-\cos(x)$

(b) (4 point). Hvilket af nedenstående polynomier er 2. ordens Taylor polynomiet for $f(x)$ med udviklingspunkt $a = 0$?

- [ ] $x - \frac{1}{2}x^2$
- [ ] $1 - 3x - 4x^2$
- [ ] $-x + x^2$
- [ ] $2x + 5x^2$
- [ ] x^2
- [ ] $3x$
- [ ] $1 + x^2$
- [ ] $x + 9x^2$
- [x] x
- [ ] $1 + x + x^2$

Opgave 4 (6 point)

En kurve i rummet er givet ved

$$\begin{aligned} x &= \cos(t), \\ y &= 2\sin(t), \\ z &= t, \end{aligned}$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal. Markér det korrekte udtryk for buelængden af kurven fra $t = 0$ til $t = \pi$.

- [ ] $\int_0^\pi \sqrt{2}\,dt$
- [ ] $\int_0^\pi (\sin(t) + 2\cos(t) + 1)\,dt$
- [ ] $\int_0^\pi \sqrt{\cos^2(t) + 4\sin^2(t) + t^2}\,dt$
- [x] $\int_0^\pi \sqrt{3\cos^2(t) + 2}\,dt$
- [ ] $\int_0^\pi (-\sin(t) + 2\cos(t) + 1)\,dt$
- [ ] $\int_0^\pi \sqrt{3 + t^2}\,dt$

Opgave 5 (8 point)

En plan kurve er givet ved

$$x = \sin(t),$$
$$y = t^2,$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (1 point). Hvilket punkt på kurven svarer til parameterværdien $t = 0$?

☐ $(\pi, 0)$ ☐ $(1, 1)$ ☐ $(-1, 1)$ ☒ $(0, 0)$ ☐ $(1, 0)$

(b) (7 point). Hvad er krumningen af kurven for $t = 0$?

☐ $\frac{3}{125}$ ☐ 3 ☒ 2 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Opgave 6 (10 point)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2x + y}.$$

Afkryds den rigtige mulighed i hvert delspørgsmål herunder.

(a) (5 point). Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x, y), der opfylder

☐ $x \neq 0$ og $y \neq 0$ ☒ $y \neq -2x$
☐ $x^2 + y^2 \leq 1$ ☐ $x \geq 0$ og $y \geq 0$
☐ $x^2 + y^2 \leq 2$ ☐ $2x + y = 1$

(b) (5 point). Niveaukurven med ligning $f(x, y) = 2$ kan beskrives som:

☐ En cirkel med centrum i $(1, 2)$ og radius 1.

☒ En cirkel med centrum i $(2, 1)$ og radius 2.

☐ En ret linje gennem $(0, 0)$ med hældningskoefficient 2.

☐ En ret linje gennem $(0, 0)$ med hældningskoefficient $\frac{1}{2}$.

☐ En parabel med ligning $y = 3x^2 + 3x + 1$.

☐ En parabel med ligning $y = 5x^2 + 1$.

Opgave 7 (6 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x,y) = \sin(x^3 + x^2y + y^2 - 1).$$

(a) (2 point). Hvad giver funktionsværdien $f(1,-1)$?

☐ -1 ☐ 1 ☐ π ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☒ 0

(b) (4 point). Hvad giver den partielle afledede $f_x(x,y)$?

☐ $3x^2\cos(x^3 + x^2y + y^2 - 1)$

☐ $\sin(3x^2 + 2xy)$

☐ $\sin(3x^2)$

☐ $\cos(3x^2 + 2xy)$

☒ $(3x^2 + 2xy)\cos(x^3 + x^2y + y^2 - 1)$

☐ $\cos(x^3 + x^2y + y^2 - 1)$

Opgave 8 (8 point)

En funktion er givet ved

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 3xy - 8x + 5y + 1.$$

(a) (4 point). Hvilket af følgende punkter er et kritisk punkt for f?

☐ $(0,0)$ ☐ $(1,0)$ ☐ $(0,2)$ ☒ $(1,2)$ ☐ $(1,1)$

(b) (4 point). Hvad giver den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (1,1)$ og retningen bestemt ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = -\frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j} = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$?

☐ $\frac{3}{5}$ ☐ 0 ☒ $\frac{24}{5}$ ☐ 3 ☐ $-\frac{11}{5}$

Opgave 9 (7 point)

En flade i rummet $\mathcal{F}$ er bestemt ved ligningen $F(x,y,z) = 0$, hvor

$$F(x,y,z) = e^x + y^2 + z^3 - 6.$$

Fladen $\mathcal{F}$ har en tangentplan i punktet $P = (0,2,1)$. Markér en ligning for denne tangentplan herunder.

- ☐ $x + y + 3z = 4$
- ☒ $x + 4y + 3z = 11$
- ☐ $2x - y + 3z = 1$
- ☐ $3x + 2y + 3z = 3$
- ☐ $x + y - z = 5$
- ☐ $2x + y - 6z = 10$
- ☐ $x - 2y + 6z = 12$
- ☐ $6x + y + z = 3$
- ☐ $x + y + z = 5$
- ☐ $x + y - z = 11$

Opgave 10 (10 point)

Et område $\mathcal{R}$ i planen er beskrevet ved de punkter (x,y), som opfylder ulighederne

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq y.$$

Markér værdien af planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2)^3 \, dA.$$

☐ $\frac{2\pi}{3}$	☐ 6	☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	☐ $\frac{6\pi}{5}$	☐ $\frac{\pi}{4}$
☐ $\frac{\pi}{12}$	☐ $\frac{3}{4}$	☒ $\frac{\pi}{8}$	☐ 9	☐ $\frac{1}{2}$

Opgave 11 (5 point)

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = \frac{3+i}{1+2i} + 7 - i, \qquad z_2 = 5e^{3\pi i}.$$

(a) (3 point). Hvad giver z_1 skrevet på standard form?

☐ $8+i$ ☐ $3i$ ☐ $5+2i$ ☒ $8-2i$ ☐ $7+i$

(b) (2 point). Hvad giver z_2 skrevet på standard form?

☐ $5+5i$ ☒ -5 ☐ $5-5i$ ☐ $5i$ ☐ 5

Bemærkning. I opgave 12 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 12 (6 point)

Lad $\mathcal{T}$ være området i rummet bestående af de punkter (x, y, z), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2-2x, \quad 0 \leq z \leq 3x.$$

Et legeme med massetætheden (densiteten) $\delta(x, y, z) = x + 1$ dækker netop området $\mathcal{T}$. Legemets rumfang (volumen) betegnes V, og legemets masse betegnes m. Markér samtlige korrekte udtryk nedenfor.

☐ $m = \int_0^{2-2x} \int_0^1 \int_0^{3x} (x+1)\, dzdxdy.$

☐ $m = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{2+x} (x+1)\, dzdydx.$

☒ $m = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{3x} (x+1)\, dzdydx.$

☒ $V = \int_0^2 \int_0^{\frac{2-y}{2}} \int_0^{3x} dzdxdy.$

☐ $V = \int_0^2 \int_0^{1-y} \int_0^{3x} dzdxdy.$

Opgave 13 (8 point).

Besvar følgende 4 sand/falsk opgaver:

(a) (2 point). Punktet med rektangulære koordinater $(x, y) = (2, -2)$ kan i polære koordinater angives ved $(r, \theta) = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{2})$.

☐ Sand ☒ Falsk

(b) (2 point). Lad D være området i planen bestående af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 1$. Lad f være funktionen med forskrift

$$f(x, y) = \frac{2x}{x + y + 1}$$

og definitionsmængde D. Da antager f globalt maksimum på D.

☒ Sand ☐ Falsk

(c) (2 point). Lad D være området i planen bestående af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne $0 < x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 1$. Lad f være funktionen med forskrift

$$f(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

og definitionsmængde D. Da antager f globalt maksimum på D.

☐ Sand ☒ Falsk

(d) (2 point). For ethvert reelt tal b har følgende ligning i den ubekendte x netop én løsning:

$$\arctan(x) = b.$$

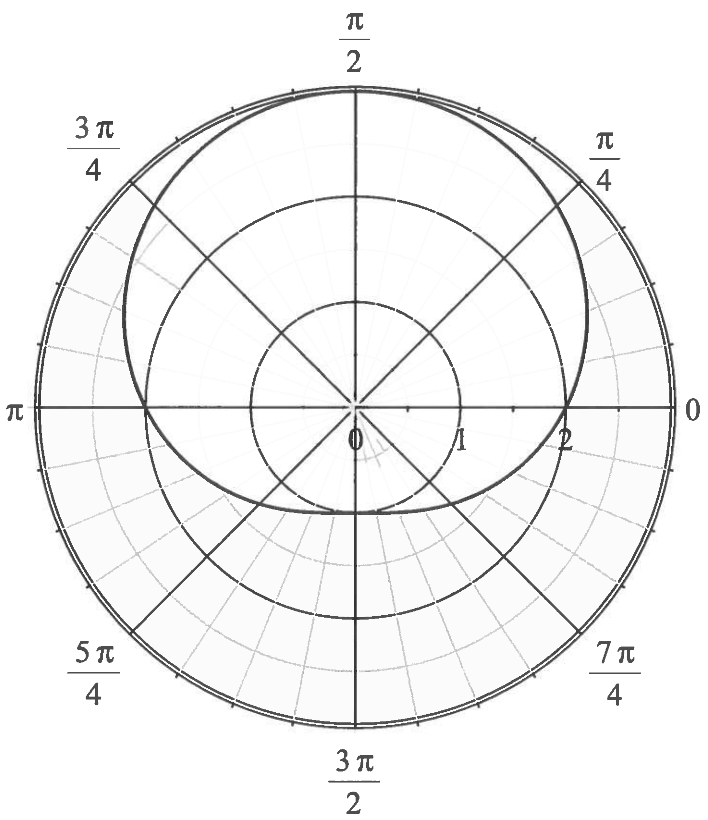
☐ Sand ☒ Falsk

Opgave 14 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen

$$r = f(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f svarer til figuren?

- ☐ $f(\theta) = 3 - \cos(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 2 - \cos(\theta)$
- ☒ $f(\theta) = 2 + \sin(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \sin(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 2\sin(\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 3\cos(2\theta)$