Eksamen i Calculus

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

3. januar 2017

Dette eksamenssæt består af 9 nummererede sider med 13 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger. Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

Held og lykke!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

Opgave 1 (9 point)

En kurve i planen er givet ved

$$x = t^2,$$
$$y = t^3 - t,$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

(a) (2 point). Kurven skærer sig selv i et punkt, der har førstekoordinaten $x = 1$. Hvad er andenkoordinaten for dette skæringspunkt?

☐ 1 ☐ 3 ☐ -1 ☐ 0 ☐ 2

(b) (7 point). Hvad er krumningen af kurven for $t = 0$?

☐ 3 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ π ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ 0

☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ 4 ☐ $\sqrt{3}$

Opgave 2 (9 point)

En kurve i rummet er givet ved

$$x = \tfrac{1}{2}t^2,$$
$$y = \tfrac{1}{3}(2t)^{\frac{3}{2}},$$
$$z = t,$$

hvor parameteren t gennemløber de positive reelle tal.

(a) (2 point). Markér det korrekte udtryk for den afledede y'.

☐ $t\sqrt{2t}$ ☐ t ☐ $\sqrt{2t}$ ☐ $t\sqrt{t}$ ☐ $\sqrt{t}$

(b) (7 point). Hvad er buelængden af kurven fra $t = 2$ til $t = 4$?

☐ 8 ☐ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ☐ 10 ☐ $\sqrt{3}$ ☐ 1

☐ $\sqrt{2}$ ☐ 6 ☐ $\frac{5}{2}$ ☐ $\frac{8}{3}$ ☐ 12

Opgave 3 (7 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x) = \ln(\cos x)$$

for $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

(a) (2 point). Hvad er differentialkvotienten $f'(x)$?

- ☐ $\frac{1}{\cos x}$
- ☐ $\frac{\sin x}{x}$
- ☐ $-\frac{1}{\sin x}$
- ☐ $-\tan x$
- ☐ $\frac{1}{x}$
- ☐ $\frac{\cos x}{x}$

(b) (5 point). Hvilket af nedenstående polynomier er anden ordens Taylor polynomiet for $f(x)$ med udviklingspunkt $x = 0$?

- ☐ $x + \frac{3}{2}x^2$
- ☐ $x - x^2$
- ☐ $1 - 3x$
- ☐ $2x + \frac{5}{2}x^2$
- ☐ $-\frac{1}{2}x^2$
- ☐ $2 + x - 3x^2$
- ☐ $1 + 3x^2$
- ☐ x^2
- ☐ $1 + x - \frac{3}{2}x^2$
- ☐ $1 - x + x^2$

Opgave 4 (5 point)

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = (1-i)(2-3i) + 7i, \quad z_2 = i(1+i).$$

(a) (2 point). Hvad er z_1 skrevet på standard form?

☐ $2 + 10i$ ☐ $1 + i$ ☐ $-1 + 2i$ ☐ i ☐ $3 - i$

(b) (3 point). Hvad er z_2 skrevet på polær form?

☐ $\sqrt{2}\,e^{3\pi i/4}$ ☐ $\sqrt{2}\,e^{\pi i/2}$ ☐ $2e^{\pi i/4}$ ☐ $e^{-\pi i/4}$ ☐ e^{2i}

Opgave 5 (10 point)

(a) (6 point). En homogen anden ordens differentialligning er givet ved

$$y'' + 4y' + 20y = 0.$$

Herunder er angivet en række funktionsudtryk, hvori c_1 og c_2 er arbitrære konstanter. Markér det udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen.

- ☐ $y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{5t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-t} \cos(3t) + c_2 e^{-t} \sin(3t)$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-t} \cos(5t) + c_2 e^{-t} \sin(5t)$
- ☐ $y(t) = c_1 e^{-2t} \cos(4t) + c_2 e^{-2t} \sin(4t)$

(b) (4 point). Det oplyses, at funktionen $f(t) = \frac{1}{4}t$ er en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning

$$y'' + 4y' + 20y = 1 + 5t.$$

Markér en partikulær løsning til differentialligningen

$$y'' + 4y' + 20y = 1 + 5t + 5e^t$$

blandt følgende funktionsudtryk:

- ☐ $g(t) = 2t + e^t$
- ☐ $g(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{5}e^t$
- ☐ $g(t) = \frac{1}{4}t + e^{5t}$
- ☐ $g(t) = t^2 + e^{-t}$
- ☐ $g(t) = \frac{1}{4}t + 3e^t$
- ☐ $g(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}e^{10t}$
- ☐ $g(t) = \frac{1}{8}t + \frac{1}{8}t^2 + e^t$
- ☐ $g(t) = \frac{1}{4}t + 5e^t$

Opgave 6 (9 point)

En funktion er givet ved

$$f(x,y) = \frac{2x^2 - 2y + 3}{x^2 - y}.$$

Afkryds den rigtige mulighed i hvert delspørgsmål herunder.

(a) (4 point). Definitionsmængden for f består af samtlige punkter (x,y), der opfylder

- ☐ $x^2 > y$
- ☐ $y \le x$
- ☐ $y \neq x^2$
- ☐ $2x - 1 \neq 0$
- ☐ $x^2 + y^2 \le 1$
- ☐ $y \le 0$

(b) (5 point). Niveaukurven med ligning $f(x,y) = 5$ kan beskrives som:

- ☐ En parabel med ligning $y = x^2 - 1$.
- ☐ En parabel med ligning $y = 2x^2 - y + 3$.
- ☐ En ret linje gennem $(0,0)$ med hældningskoefficienten 3.
- ☐ En ret linje gennem $(0,3)$ med hældningskoefficienten 2.
- ☐ En cirkel med centrum i $(0, \frac{3}{2})$ og radius 2.
- ☐ En cirkel med centrum i $(1,2)$ og radius $\frac{1}{2}$.

Opgave 7 (5 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x,y) = x^2 \arctan y.$$

Hvad er den anden ordens partielle afledede $f_{xy}(x,y)$?

- ☐ $2x(1 + \tan^2 y)$
- ☐ $\frac{2x}{\sqrt{1-y^2}}$
- ☐ $\frac{2}{1+y^2}$
- ☐ $2 \arctan y$
- ☐ $\frac{2x}{1+y^2}$
- ☐ $\frac{-2x^2 y}{(1+y^2)^2}$

Opgave 8 (12 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x,y) = x^3 + y - xy.$$

(a) (1 point). Hvad er funktionsværdien $f(-1,1)$?

☐ 1 ☐ -1 ☐ 0 ☐ 3 ☐ -3

(b) (3 point). Hvilket af følgende punkter er et kritisk punkt for f?

☐ $(1,1)$ ☐ $(-1,2)$ ☐ $(1,3)$ ☐ $(2,1)$ ☐ $(1,2)$

(c) (4 point). Grafen for f har en tangentplan i punktet $P = (-1,1,f(-1,1))$. Markér en ligning for denne tangentplan.

☐ $2x + 2y - z = -1$ ☐ $x + 2y - z = 3$

☐ $x + 2y + z = 2$ ☐ $x - z = 3$

☐ $-x + y - z = 1$ ☐ $3x + 2y - z = 2$

(d) (4 point). Lad $g(t)$ og $h(t)$ være to differentiable funktioner, som opfylder betingelserne $g(0) = 2$, $g'(0) = 1$ og $h(0) = 0$, $h'(0) = 2$. Betragt den sammensatte funktion

$$w(t) = f(g(t), h(t)).$$

Hvad er differentialkvotienten $w'(0)$?

☐ 0 ☐ 13 ☐ 2 ☐ -1 ☐ $\frac{1}{2}$

☐ 7 ☐ 10 ☐ 3 ☐ 8 ☐ $-\frac{3}{2}$

Opgave 9 (5 point)

En funktion er defineret ved

$$f(x,y,z) = x^2 - e^y + e^{z+1}.$$

Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (1,0,-1)$ og retningen bestemt ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$?

☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{4}{3}$ ☐ -3 ☐ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$

☐ 2 ☐ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ☐ 1 ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ 7

Opgave 10 (10 point)

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne

$$x^2 + y^2 \leq \tfrac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y.$$

Markér værdien af planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} \cos(x^2 + y^2)\, dA.$$

☐ $\frac{1}{2}$	☐ $\frac{4\pi}{3}$	☐ $\frac{11}{7}$	☐ $\frac{\pi}{2}$	☐ $\frac{3\pi}{11}$
☐ $\frac{\pi^2}{4}$	☐ $\frac{2\pi}{7}$	☐ $\frac{\pi}{4}$	☐ $\frac{5}{2}$	☐ 1

Bemærkning. I opgave 11 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 11 (6 point)

Lad $\mathcal{T}$ være området i rummet bestående af de punkter (x, y, z), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y.$$

Et legeme med massetætheden (densiteten) $\delta(x, y, z) = 1 - z$ dækker netop området $\mathcal{T}$. Legemets rumfang (volumen) betegnes V, og legemets masse betegnes m. Markér samtlige korrekte udtryk nedenfor.

☐ $m = \int_0^{1-x-y} \int_0^{1-x} \int_0^1 (1 - z)\, dxdydz.$

☐ $m = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-x-y} (1 - z)\, dzdydx.$

☐ $m = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (1 - z)\, dzdydx.$

☐ $V = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x-y} dzdxdy.$

☐ $V = \int_0^{1-x} \int_0^1 \int_0^{1-x-y} dzdxdy.$

Opgave 12 (8 point)

Besvar følgende 4 sand/falsk opgaver:

(a) (2 point). Det gælder, at

$$\frac{d}{dx}\big((x^2+1)\arctan x\big) = 2x\arctan x + 1$$

for alle reelle tal x.

☐ Sand ☐ Falsk

(b) (2 point). Punktet med polære koordinater $(r,\theta) = (-5,\pi)$ har rektangulære koordinater $(x,y) = (-5,0)$.

☐ Sand ☐ Falsk

(c) (2 point). For ethvert komplekst tal z gælder der, at

$$|iz| = -|z|.$$

☐ Sand ☐ Falsk

(d) (2 point). Lad D være området i planen bestående af de punkter(x,y), som opfylder uligheden $x^2+y^2 \leq 4$. Lad f være funktionen med forskrift

$$f(x,y) = x^2y - e^x$$

og definitionsmængde D. Da antager f globalt minimum på D.

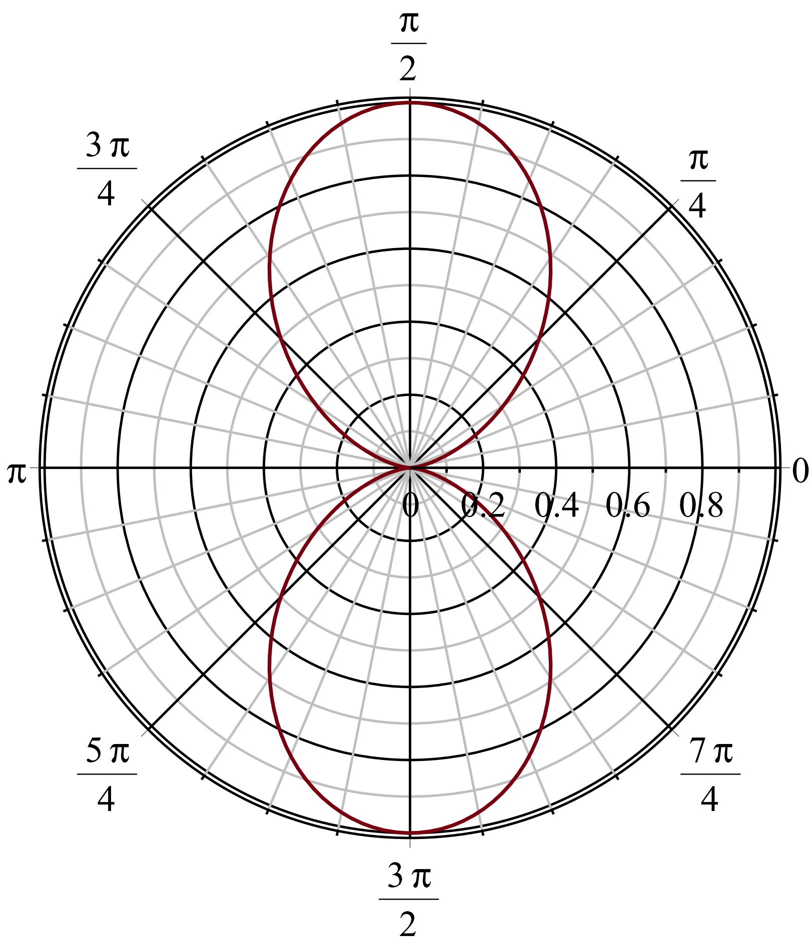
☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 13 (5 point)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f svarer til figuren?

- ☐ $f(\theta) = \sin(2\theta)$
- ☐ $f(\theta) = 2 - \sin\theta$
- ☐ $f(\theta) = 1 - \cos\theta$
- ☐ $f(\theta) = 1 + 2\sin\theta$
- ☐ $f(\theta) = \sin^2\theta$
- ☐ $f(\theta) = \cos^2\theta$