

## Opgavebeskrivelse

Til denne selvstudiegang skal vi se på, hvordan man omregner koordinater fra et datum til et andet. Et datum er groft sagt en model over jordens overflade, der består af en rotationsellipsoide placeret i et koordinatsystem (se [1] for detaljer). En rotationsellipsoide beskrives ved dens store halvakse  $a$  og fladtrykning  $f$  som vist på Figur 1.

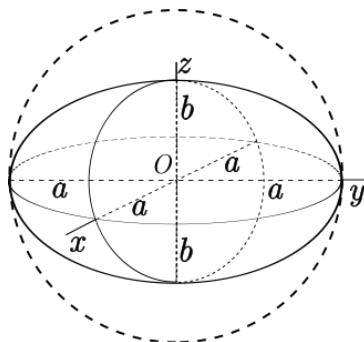


Figure 1: Rotationsellipsoide med stor halvakse  $a$  og fladtrykning  $f = (a - b)/a$ .

Ved at sætte et datum i relation til nogle fysiske punkter på jordens overflade kan man angive koordinater  $(x, y, z)$  til punkter på jordfladen. Da jordens form ikke følger én ellipsoide, så bruger man forskellige datum alt efter, hvilke dele af verden man skal tilnærme. Et og samme punkt på jorden får dermed forskellige koordinater afhængig af, hvilket datum man anvender.

Man kan omregne koordinater fra et datum til et andet ved at bruge en 3-dimensional Helmert-transformation. Hvis  $(x_a, y_a, z_a)$  beskriver koordinaterne i datum  $A$ , og  $(x_b, y_b, z_b)$  beskriver koordinaterne i datum  $B$ , så er Helmert-transformationen givet ved

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = sR \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} + \mathbf{T}, \quad (1)$$

hvor  $s > 0$  er en skaleringsfaktor,  $\mathbf{T} = [t_1, t_2, t_3]^T$  er en translation og  $R$  er en  $3 \times 3$  ortogonal (rotations)matrix.

**Datum ED50 og ETRS89** Indtil 1990erne var målinger i Danmark relateret til datum ED50, hvorefter man overgik til datum ETRS89 (se [1] for detaljer). I forbindelse med overgangen til det nye system var der behov for at omregne koordinater fra ED50 til ETRS89. På grundlag af koordinater i begge systemer udledte man følgende parametre for Helmert-transformationen (se [2] for detaljer):

$$s = 1 - 0.540645 \cdot 10^{-6}, \quad (2)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -81.0703\text{m} \\ -89.3603\text{m} \\ -115.7526\text{m} \end{bmatrix},$$

$$R = R_z R_y R_x,$$

hvor

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos(r_z) & \sin(r_z) & 0 \\ -\sin(r_z) & \cos(r_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_z = -0.41321'',$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos(r_y) & 0 & -\sin(r_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(r_y) & 0 & \cos(r_y) \end{bmatrix}, \quad r_y = -0.02436'',$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(r_x) & \sin(r_x) \\ 0 & -\sin(r_x) & \cos(r_x) \end{bmatrix}, \quad r_x = -0.48488''.$$

Bemærk, at  $(r_z, r_y, r_x)$  er angivet ved antal buesekunder. Der går 3600 buesekunder til en grad, så f.eks. er  $r_z = -0.41321/3600 = -1.1478 \cdot 10^{-4}$  grader. Skal man omregne til radianer gøres dette ved  $r_z = -0.41321/3600 \cdot (\pi/180) = -2.0033 \cdot 10^{-6}$ .

## Delopgave 1

Til denne delopgave skal vi omregne fra ED50-koordinater til ETRS89-koordinater og tilbage igen. Koordinaterne for Strandvejen 12-14 i Aalborg i forhold til ED50 er

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3425215.1908\text{m} \\ 598519.8724\text{m} \\ 5329285.4695\text{m} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

1. Lav et Matlab script, der omregner udtrykkene for  $r_z, r_y$  og  $r_x$  til radianer (så de er kompatible med Matlab). HINT: Hvis I indfører vektoren  $[r_z, r_y, r_x]^T$ , så kan I omregne alle tre værdier til radian på én gang.
2. Definer  $R_z, R_y$  og  $R_x$ , hvor I bruger radianværdierne af  $[r_z, r_y, r_x]^T$  fra den forrige opgave. Definer herefter rotationsmatricen  $R = R_z R_y R_x$ .
3. I skal nu omregne ED50-koordinaterne i (3) til ETRS89-koordinater. HINT: I skal definere  $s$  og  $\mathbf{T}$  og herefter anvende Helmert-transformationen givet i (1).
4. Udvid scriptet til at printe forskellene mellem de to koordinatsæt (I skulle gerne få en afstand på omkring 100m i hver retning). HINT: Hvis I har samlet ED50-koordinaterne i en vektor `coor_a`, og ETRS89-koordinaterne i en anden vektor `coor_b`, så kan I printe forskellene mellem dem ved `disp(abs(coor_b-coor_a))`.
5. Det er også nyttigt at kunne omregne den anden vej; altså fra koordinater i ETRS89 til koordinater i ED50. I skal nu bestemme den inverse Helmert-transformation og omregne jeres facit fra den forrige opgave til ED50-koordinater. Hvis I har gjort det rigtigt, så burde det resultere i de oprindelige koordinater givet i (3) (evt. med meget små afrundingsfejl). HINT: Den inverse Helmert-transformation bestemmes ved at isolere  $[x_a, y_a, z_a]^T$  i (1).

## Delopgave 2

Til denne delopgave forestiller vi os, at vi (tilbage omkring år 1990) var blevet bedt om at udregne parametrene for Helmert-transformationen ud fra forskellige målinger i Danmark. Mere præcist forestiller vi os, at målingerne er af typen (ED50, ETRS89), og at de er blevet foretaget i følgende fire danske byer (koordinaterne er angivet i meter):

$$\begin{aligned} \text{København:} & \left( \begin{bmatrix} 3519346.5041 \\ 780411.3490 \\ 5244315.7640 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3519265.7139 \\ 780302.1883 \\ 5244198.5950 \end{bmatrix} \right), \\ \text{Århus:} & \left( \begin{bmatrix} 3501126.9436 \\ 627264.0535 \\ 5276744.2873 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3501045.8603 \\ 627154.9359 \\ 5276626.7429 \end{bmatrix} \right), \\ \text{Frederikshavn:} & \left( \begin{bmatrix} 3381620.8786 \\ 626736.4755 \\ 5353661.1696 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3381539.8679 \\ 626627.4168 \\ 5353543.5965 \end{bmatrix} \right), \\ \text{Esbjerg:} & \left( \begin{bmatrix} 3581863.7096 \\ 531472.7044 \\ 5233189.0552 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3581782.3855 \\ 531363.5792 \\ 5233071.2996 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Vi antager, at vi kender værdien af  $s$  givet i (2). Vi skal nu bruge ovenstående målinger til at bestemme  $\mathbf{T}$  og  $R$ . Vi benævner Helmert-transformationen med  $H$ , så

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = H \left( \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \right) = sR \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} + \mathbf{T}, \quad s = 1 - 0.540645 \cdot 10^{-6}. \quad (4)$$

For at bestemme  $\mathbf{T}$  og  $R$  skal vi arbejde med differenserne mellem de forskellige målinger. Ser man på differensen København-Århus fås

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3519265.7139 \\ 780302.1883 \\ 5244198.5950 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3501045.8603 \\ 627154.9359 \\ 5276626.7429 \end{bmatrix} &= H \left( \begin{bmatrix} 3519346.5041 \\ 780411.3490 \\ 5244315.7640 \end{bmatrix} \right) - H \left( \begin{bmatrix} 3501126.9436 \\ 627264.0535 \\ 5276744.2873 \end{bmatrix} \right) \\ &= sR \left( \begin{bmatrix} 3519346.5041 \\ 780411.3490 \\ 5244315.7640 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3501126.9436 \\ 627264.0535 \\ 5276744.2873 \end{bmatrix} \right). \quad (5) \end{aligned}$$

1. Lav et Matlab script, hvor I implementerer udregningerne i (5). Gentag herefter dette med differenserne København-Frederikshavn og København-Esbjerg.
2. I har nu fundet tre ligninger af typen  $\mathbf{w}_i = sR\mathbf{v}_i$ . Dette kan ved matrixnotation skrives som  $[\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3] = sR[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$ . I skal nu ud fra denne ligning bestemme  $R$  i Matlab.
3. Bestem  $\mathbf{T}$  ved at indsætte en måling i (4) og isolere  $\mathbf{T}$ .
4. Brug de fundne værdier af  $R$  og  $\mathbf{T}$  til at omregne ED50-koordinaterne i (3) til ETRS89-koordinater. Sammenlign herefter med resultatet fra delopgave 1.

## References

- [1] T. Balstrøm, O. Jacobi, and L. Bodum. *Bogen om GIS og geodata*. Forlaget GIS og geodata, 2006.
- [2] A. B. O. Jensen and K. Engsager. GPS og koordinattransformationer II. *Landinspektøren*, 2001.