Selvstudium 1

I dette selvstudium bruges MATLAB som et vigtigt værktøj til at løse opgaverne. Som en introduktion til MATLAB kan du se screencast 2 og 3, som kan findes på first.math-hjemmesiden: `http://first.math.aau.dk/dan/software/matlab/`

Du kan bruge filen `Self-study-1.m` til at gemme de kommandoer, der skal bruges i hver af opgaverne, og MATLAB kan også køre kommandoerne fra filen. Omkring koden kan du bemærke:

1. Kommandoen `disp('....')` skriver tekst på skærmen.
2. Brug forklarende navne til output-variablene.
3. Kommandoer mellem %% og %% kan køres ved at venstre-klikke på dem (dermed aktiveres det pågældende "kodeafsnit") og derefter trykke ***Run section***.
4. Bemærk: Hvis du skriver tekst lige efter %% uden mellemrum (som i `%%Exercise-1...`), så registrerer MATLAB ikke dette som en et nyt afsnit.

For at komme i gang med dette selvstudium, kan du bruge følgende trin.

1. Gem filen `Self-study-1.m` på din harddisk.
2. Lav en kopi af den, hvor du for eksempel tilføjer dine forbogstaver (og evt. et versionsnummer) til filnavnet såsom `Self-study-1-abc-v1.m`.
3. Start MATLAB, og åbn `.m`-filen.
4. Klik nu på det første kodeafsnit (under *%% Chapter 1 Exercise 1*), og tryk herefter "Run section". Hvis du bliver spurgt, skal du vælge *"add the path to the current one"*.
5. Hvis du følger ovenstående, køres kommandoerne i det første afsnit, og outputtet skrives i kommandovinduet.

Opgaverne 1–4 tager henholdsvist omkring 45, 45, 30 og 15 minutter at løse.

Øvelse 1

Løs opgaverne 1, 2, 4, 5, 7 og 8 fra side 90-91 i bogen. Herunder er nogle kommentarer omkring koden i `Self-study-1.m`.

- Exercise-1: Løsningen til 1a er givet som et eksempel.
- Exercise-2: Matricerne A, B og vektoren $\mathbf{v}$ er allerede definerede, og løsningerne til 2a, 2b og 2c er givet som eksempler.
- Exercise-4: Denne er lavet på forhånd, og du kan køre gennem de forskellige skridt, som hver definerer ét trin i Gauss-eliminationen.
- Exercise-5: Øvelse 5a er givet som et eksempel.
- Exercise-7: Nogle af kommandoerne, der skal bruges, er allerede givet i øvelserne 7a og 7b.

Øvelse 2

a) Løs øvelse 94, 95 og 96 på side 55 ved at finde den reducerede trappeform af hver af matricerne ved først at bruge `rref`-kommandoen i MATLAB, og derefter løse ligningssystemet (i hånden) fra den reducerede trappeform. Se Eksempel 3 på side 34–35.

b) Brug nu følgende alternative metode til at løse samme opgave som i a) ved at bruge følgende MATLAB-kommandoer:

`linsolve`: giver en løsning til et konsistent lineært ligningssystem. (Bemærk, at for et inkonsistent system giver kommandoen en *approksimativ løsning*).

`null(A)`: returnerer en mængde af lineært uafhængige vektorer $\mathbf{x}$, som er løsninger til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, hvor $\mathbf{0}$ er nulvektoren. Antallet n af lineært uafhængige søjler $\mathbf{x}$, som opfylder $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kaldes nulliteten af A. Dette n kan også være nul.

Som et eksempel betragter vi Practice Problem 1 på side 46 i bogen. Vi indtaster koefficientmatricen A og vektoren $\mathbf{b}$ på systemets højreside.

```
>> A = [1 -1 -3 1 -1 ; -2 2 6 0 -6 ; 3 -2 -8 3 -5] <enter>
A =
     1    -1    -3     1    -1
    -2     2     6     0    -6
     3    -2    -8     3    -5
```

```
>> b = -[2 ; 6 ; 7] <enter>
b =
    -2
    -6
    -7
```

Fra `linsolve` finder vi nu en løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

```
>> w = linsolve(A, b) <enter>
w =
         0
    1.8750
   -0.3750
         0
    1.2500
```

Vi kan tjekke, at dette *er* en løsning ved at efterprøve, om $A\mathbf{w} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$:

```
>> A*w - b <enter>
ans =
   1.0e-14 *

    0.1110
    0.2665
    0.0888
```

Forskellen mellem $A\mathbf{w}$ og $\mathbf{b}$ er mindre end 10^{-14}, så det er ikke præcist nul, men dette skyldes en (meget lille) numerisk fejl.

Den generelle (fuldstændige) løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er alle de vektorer $\mathbf{x}$, der bliver frembragt ved at tage outputtet fra `linsolve`-kommandoen—hvis output er én enkelt søjlevektor, som vi betegner med $\mathbf{w}$—og lægge en hvilken som helst linearkombination af løsningerne til den homogene ligning $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ til—sidstnævnte finder vi ved `null`-kommandoen. Det vil sige, at vi finder dem ved

```
>> null(A)
ans =
   -0.4584    0.6799
    0.4932   -0.1239
   -0.1412    0.4120
    0.7040    0.5761
```

```
    0.1760    0.1440
```

og hvis vi betegner den første søjle i ovenstående med $\mathbf{u}$ og den anden søjle med $\mathbf{v}$, så er alle vektorerne $\mathbf{x} = \mathbf{w} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ for ethvert $s, t \in \mathbb{R}$ løsninger til matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Efterprøv korrektheden af det sidste udsagn ved at udregne $\mathbf{x} = \mathbf{w} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ for nogle forskellige værdier af s og t i opgaverne nævnt i a) og herefter tjekke, at $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ holder (pånær små numeriske fejl). Gør stadig dette i `.m`-filen, hvor ovenstående er gjort for Practice Problem 1.

Øvelse 3

Løs nu øvelserne 3 og 6 på side 90–91, og definer selv rotationsmatricen A_θ i MATLAB (dvs. du skal ikke bruge `rotdeg`-funktionen). Bemærk, at inputtet til sin og cos i MATLAB er i radianer og ikke grader.

Øvelse 4

Løs øvelserne 94, 95 og 96 på side 55 ved at bruge `rref`-kommandoen til at finde den reducerede trappeform af totalmatricerne.