Partielle afledede og retningsafledede

1 Partielle afledede, definitioner og notationer

Bertragt en funktion af to reelle variable $f : D \to \mathbb{R}$, hvor $D \subseteq \mathbb{R}^2$ er et åbent område. Med benyttelse af tilvækstfunktionen $\Delta f(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$ definerer vi de partielle afledede i punktet $(x_0,y_0) \in D$ ved

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(h,0)}{h} \ ^{1)}$$

og

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{\Delta f(0,k)}{k},$$

når disse grænseværdier eksisterer.

Afledede funktioner $f_x(x,y)$ og $f_y(x,y)$ fremkommer, når f_x og f_y er veldefinerede i alle punkter i et område. I så fald er disse funktioner selv funktioner af to reelle variable, som hver giver anledning til to partielle afledede. Disse benævnes $f_{xx}(x,y)$ og $f_{xy}(x,y)$ samt $f_{yx}(x,y)$ og $f_{yy}(x,y)$. De to funktioner f_{xx} og f_{yy} kaldes rene afledede, og de to andre f_{xy} og f_{yx} kaldes blandede afledede. Tilsammen kaldes de for partielle afledede af anden orden.

Partielle afledede af første orden noteres på flere forskellige måder. Her er et udvalg:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = D_1 f(x,y), \quad \text{kort form } \frac{\partial f}{\partial x}, \\ f_y(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = D_2 f(x,y), \quad \text{kort form } \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Den mest udbredte notation er de korte former $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$, hvor punktet (x,y) er underforstået. Bemærk, at $\frac{\partial f}{\partial x}$, subsidiært $\frac{\partial f}{\partial y}$, er ét samlet symbol. Tegnet ∂ kaldes et blødt d i modsætning til et hårdt d i $\frac{df}{dx}$.

Notationen $f_1(x,y)$ og $f_2(x,y)$ benyttes også, men kan være problematisk, da $f_1, f_2, \ldots$ ofte benyttes til at nummerere funktioner.

De partielle afledede af anden orden noteres

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = D_{11} f(x,y), \quad \text{kort form } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = D_{12} f(x,y), \quad \text{kort form } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \end{aligned}$$

1) $\frac{\Delta f(h,0)}{h}$ kan også skrives som $\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$, den såkaldte differenskvotient; analogt $\frac{\Delta f(0,k)}{k}$.

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = D_{21}f(x,y), \quad \text{kort form } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$
$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = D_{22}f(x,y), \quad \text{kort form } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Definition og notation af partielle afledede kan uden problemer udvides til at gælde for funktioner af flere reelle variable, dvs.

$$f_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{h_i \to 0} \frac{\Delta f(0, \ldots, 0, h_i, 0, \ldots, 0)}{h_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

når grænseværdierne eksisterer. Andre notationer er

$$f_{x_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = D_i f(\boldsymbol{x}) \quad (= f_i(\boldsymbol{x})),$$

hvor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Kort form $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.
Anden ordens afledede følger umiddelbart som

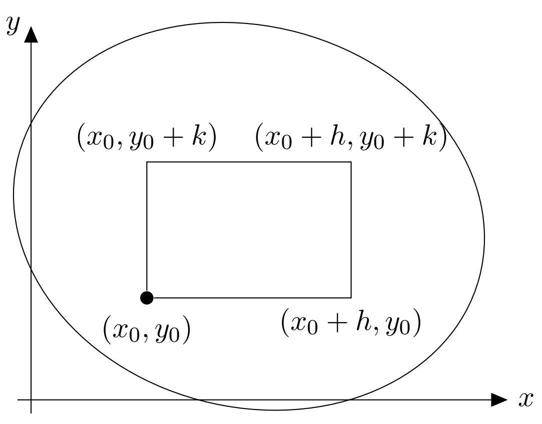
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

Ud fra de anden ordens afledede kan vi definere tredie ordens afledede, når de pågældende grænseværdier eksisterer. Processen kan fortsættes. Eksempel på notation af en femte ordens blandet afledet af $f(x,y)$: $\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}$.

2 Sætninger om blandede afledede

Vi betragter $f : D \to \mathbb{R}$, hvor $D \subseteq \mathbb{R}^2$ er et åbent område. Under visse omstændigheder vil der gælde, at de blandede afledede f_{xy} og f_{yx} er identiske.

Sætning 1. Lad f have kontinuerte partielle afledede af første orden i en omegn af $(x_0, y_0) \in D$. Hvis de blandede anden ordens partielle afledede eksisterer i omegnen af (x_0, y_0) og desuden er kontinuerte i punktet (x_0, y_0), så er $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.



Figur 1: Omegn om (x_0, y_0)

Bevis. Betragt en omegn om (x_0, y_0), se figur, og definer hjælpefunktionen $E(h,k)$ ved

$$E(h,k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0).$$

Sæt

$$u(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0),$$

og bemærk, at

$$E(h,k) = u(x_0 + h) - u(x_0).$$

Anvendelse af middelværdisætningen på $u(x)$ i intervallet mellem x_0 og $x_0 + h$ giver

$$u(x_0 + h) - u(x_0) = hu'(\xi_1),$$

hvor ξ_1 ligger mellem x_0 og $x_0 + h$. Udtrykket er ensbetydende med

$$E(h,k) = h\big(f_x(\xi_1, y_0 + k) - f_x(\xi_1, y_0)\big).$$

Sæt

$$v(y) = f_x(\xi_1, y),$$

og bemærk, at

$$E(h,k) = h\big(v(y_0 + k) - v(y_0)\big).$$

Middelværdisætningen anvendt på $v(y)$ i intervallet mellem y_0 og $y_0 + k$ giver

$$v(y_0 + k) - v(y_0) = kv'(\eta_1),$$

hvor η_1 ligger mellem y_0 og $y_0 + k$. Heraf følger, at

$$E(h,k) = hkf_{xy}(\xi_1, \eta_1).$$

Idet $(\xi_1, \eta_1) \to (x_0, y_0)$ for $(h,k) \to (0,0)$, og f_{xy} er kontinuert i (x_0, y_0), får vi ved division med hk og grænseovergang, at

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{hk} = f_{xy}(x_0, y_0).$$

Analogt kan vi i $E(h,k)$ anvende middelværdisætningen på

$$w(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$$

og dernæst på

$$z(x) = f_y(x, \eta_2),$$

hvilket fører til

$$E(h,k) = hkf_{yx}(\xi_2, \eta_2),$$

hvor ξ_2 ligger mellem x_0 og $x_0 + h$, og η_2 ligger mellem y_0 og $y_0 + k$. Division med hk og grænseovergang giver

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{hk} = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Hermed har vi bevist, at

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \qquad \square$$

En variant af sætningen med lidt andre forudsætninger lyder:

Sætning 2. Lad f have kontinuerte partielle afledede af første orden i en omegn af (x_0, y_0). Hvis én af de blandede partielle afledede af anden orden eksisterer i omegnen af (x_0, y_0) og desuden er kontinuert i punktet (x_0, y_0), da vil den anden blandede partielle afledede af anden orden også eksistere i (x_0, y_0) og være identisk med den første.

Bevis. Antag, at $f_{yx}(x, y)$ eksisterer i en omegn af (x_0, y_0) og er kontinuert i (x_0, y_0). Heraf følger, jf. beviset for den foregående sætning, at

$$E(h, k) = hkf_x(\xi_2, \eta_2).$$

Efter division med hk og to på hinanden følgende grænseovergange får vi

$$\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{E(h, k)}{hk} = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Også fra beviset for den foregående sætning har vi

$$E(h, k) = h\big(f_x(\xi_1, y_0 + k) - f_x(\xi_1, y_0)\big),$$

hvor ξ_1 ligger mellem x_0 og $x_0 + h$. Kontinuiteten af f_x medfører, at

$$\lim_{h\to 0}\frac{E(h, k)}{h} = f_x(x_0, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0) = \Delta f_x(0, k).$$

Division med k og fornyet grænseovergang giver

$$\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{E(h, k)}{hk} = \lim_{k\to 0}\frac{\Delta f_x(0, k)}{k}.$$

Da grænseværdien på venstre side eksisterer, må også grænseværdien på højre side eksistere, og idet

$$\lim_{k\to 0}\frac{\Delta f_x(0, k)}{k} = f_{xy}(x_0, y_0)$$

får vi

$$\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{E(h, k)}{hk} = f_{xy}(x_0, y_0).$$

Hermed har vi igen bevist, at

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \qquad \square$$

Sætningerne kan opretholdes for funktioner af flere reelle variable, idet vi blot definerer en funktion af to reelle variable ved at fastholde alle variable på nær to, dvs.

$$g(x_i, x_j) = f(x_{1,0}, \ldots, x_{i-1,0}, x_i, x_{i+1,0}, \ldots, x_{j-1,0}, x_j, x_{j+1,0}, \ldots, x_{n,0}).$$

Ovenstående sætninger kan herefter benyttes på $g(x_i, x_j)$, hvilket fører til

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

For højere ordens blandede partielle afledede gælder følgende sætning, som vi anfører uden bevis:

Sætning 3. Antag, at to blandede n'te ordens partielle afledede er fremkommet ved de samme differentiationer, men i forskellig rækkefølge. Antag desuden, at alle[2)] partielle afledede af orden mindre end n eksisterer og er kontinuerte i en omegn $\boldsymbol{x}_0$. Hvis de to pågældende blandede afledede eksisterer i omegnen af $\boldsymbol{x}_0$ og er kontinuerte i punktet $\boldsymbol{x}_0$, så er de identiske.

[2)] Egentlig kun tilstrækkeligt mange; hvilke vil afhænge af de specifikke blandede afledede, der betragtes.

3 Retningsafledede

Betragt en funktion af n reelle variable $f : D \to \mathbb{R}$, hvor $D \subseteq \mathbb{R}^n$ er et åbent område. Den retningsafledede i retningen bestemt ved enhedsvektoren $\boldsymbol{u}$ defineres ved

$$D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t},$$

når denne grænseværdi eksisterer.

Ved at sætte $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$ ses umiddelbart, at

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{e}_i} f(\boldsymbol{x}_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\Delta f(0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)}{t} \\ &= f_{x_i}(\boldsymbol{x}_0), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

De retningsafledede i akseretningerne er altså identiske med de partielle afledede.

Hvis vi antager, at f er differentiabel i $\boldsymbol{x}_0$[3)], kan vi benytte kædereglen[4)] til at udlede et formeludtryk for $D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x}_0)$. Sæt

$$g(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}) = f \circ \boldsymbol{r}(t),$$

hvor $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}$, og iagttag, at $D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x}_0) = g'(0)$. Differentiation af $g(t)$ giver

$$g'(t) = (Df) \circ \boldsymbol{r}(t) D\boldsymbol{r}(t) = Df(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}) D\boldsymbol{r}(t),$$

jf. kædereglen, og idet $D\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{u}$ for alle t, bliver

$$g'(0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)^\top \boldsymbol{u} = \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{u}.$$

Det søgte formeludtryk er altså

$$D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x}_0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{u}.$$

Bemærk, at

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{u} = \|\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\| \; \|\boldsymbol{u}\| \; \cos\theta,$$

hvor $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ og θ er vinklen mellem $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ og $\boldsymbol{u}$.

Den retningsafledede er størst for $\theta = 0$ og mindst for $\theta = \pi$. Størsteværdien og mindsteværdien er henholdsvis $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\|$ og $-\|\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\|$.

Vektoren $\nabla f(\boldsymbol{x})$ kaldes ofte for gradienten af f. En huskeregel: Gradienten peger i den retning, hvor funktionen vokser kraftigst.

22.4.2014/BR

[3)] Se noten 'Differentiabilitet', afsnit 5 og 6.
[4)] Se noten 'Kædereglen for vektorfunktioner'.