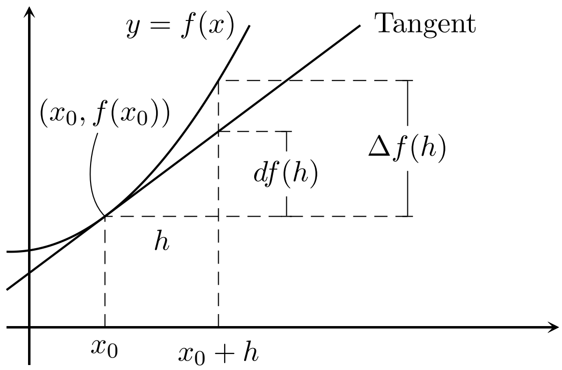
Differentiabilitet

1 Funktioner af én reel variabel

Tilvækstfunktionen Δf med udgangspunkt i x_0 er en reel funktion af tilvæksten h:

$$\Delta f(h) = f(x_0 + h) - f(x_0).$$



Figur 1: Tangent, tilvækst og differential.

Differentiabilitet i x_0:

$$f \text{ er differentiabel i } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(h)}{h} \text{ eksisterer.}$$

Grænseværdien kaldes differentialkvotienten af f i x_0 og noteres $f'(x_0)$, alternativt df/dx, hvor punktet x_0 er underforstået.

Differentialet af f med udgangspunkt i x_0 er en lineær funktion af tilvæksten h. Som funktionsnavn benyttes df, og funktionsværdien sættes til

$$df(h) = f'(x_0)h.$$

Betragter vi specielt den identiske afbildning $g(x) = x$, bliver $dg(h) = 1h = h$. Vi kan kort skrive $dg(h) = dg = dx$. Herved identificeres h med dx, og vi får

$$df = f'(x_0)dx \qquad \text{eller} \qquad f'(x_0) = \frac{df}{dx}.$$

Differentialkvotienten er altså en kvotient mellem differentialer, i tælleren differentialet af den aktuelle funktion og i nævneren differentialet af den identiske afbildning.

Ækvivalent definition af differentiabilitet:

$$f \text{ differentiabel i } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists a: \; \Delta f(h) = ah + \varepsilon(h)h,$$

hvor ε er en såkaldt epsilonfunktion, dvs. en funktion for hvilken der gælder $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.
Bemærk, at for $h \neq 0$ gælder

$$\Delta f(h) = ah + \varepsilon(h)h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta f(h)}{h} = a + \varepsilon(h),$$

hvoraf ses, at $\lim_{h\to 0} \Delta f(h)/h = a$, dvs. $a = f'(x_0)$.[1)]
Sammenhængen mellem funktionstilvækst og differential er derfor

$$\Delta f(h) = df(h) + \varepsilon(h)h \;^{2)},$$

hvoraf ses, at $df(h)$ kan benyttes som approksimation af $\Delta f(h)$ for passende små værdier af h.

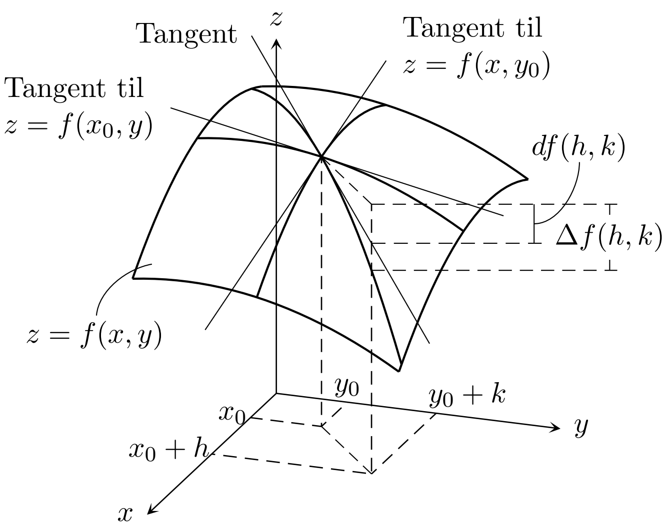
Differentiabilitet i x_0 medfører kontinuitet i x_0, idet $\Delta f(h) \to 0$ for $h \to 0$, som også skrives

$$f(x_0 + h) \to f(x_0) \quad \text{for } h \to 0.$$

2 Funktioner af to reelle variable

Tilvækstfunktionen Δf med udgangspunkt i (x_0, y_0) er en reel funktion af tilvæksterne h og k:

$$\Delta f(h,k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0).$$



Figur 2: Tangentplan, tilvækst og differential.

[1)]Omvendt, når $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(h)}{h}$ eksisterer, sæt $a = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(h)}{h}$ og $\varepsilon(h) = \frac{\Delta f}{h} - a$, hvorefter $\Delta f(h) = ah + \varepsilon(h)h$ med $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$.

[2)]$\varepsilon(h)h$ kan også noteres som $o(h)$, idet $o(h)$ står for et udtryk, hvorom der gælder, at $\frac{o(h)}{h} \to 0$ for $h \to 0$.

Differentiabilitet i (x_0, y_0):

$$f \text{ er differentiabel i } (x_0, y_0) \quad \Leftrightarrow \quad \exists a, b : \; \Delta f(h, k) = ah + bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2},$$

hvor $\lim\limits_{\sqrt{h^2+k^2}\to 0} \varepsilon(h, k) = 0$. Bemærk, at

$$\begin{aligned} \Delta f(h, 0) = ah + \varepsilon(h, 0)|h| \quad &\wedge \quad \Delta f(0, k) = bk + \varepsilon(0, k)|k| \\ \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(h, 0)}{h} = a \quad &\wedge \quad \lim_{k\to 0} \frac{\Delta f(0, k)}{k} = b. \end{aligned}$$

Disse grænseværdier kaldes henholdsvis den partielle afledede af f mht. x i (x_0, y_0) og den partielle afledede af f mht. y i (x_0, y_0). Notation:

$$a = f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \wedge \quad b = f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

I de korte former $\partial f/\partial x$ og $\partial f/\partial y$ er punktet (x_0, y_0) underforstået. Det er ikke muligt i disse symboler at give en selvstændig tolkning af tælleren og nævneren, uden at dette fører til modstrid. Symbolet $\partial f/\partial x$, henholdsvis $\partial f/\partial y$, er altså ét samlet symbol.

Differentialet af f med udgangspunkt i (x_0, y_0) er en lineær funktion af tilvæksterne h og k. Som funktionsbetegnelse benyttes også her df, dvs.

$$df(h, k) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k.$$

Bemærk, at grafen for funktionen df i $(h, k, \Delta z)$-koordinatsystemet er tangentplanen til f i $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Ser vi specielt på funktionen $g(x, y) = x$, får vi $dg(h, k) = 1h + 0k = h$. Vi skriver kort $dg(h, k) = dg = dx$, hvoraf $h = dx$. Ved at betragte $g(x, y) = y$ får vi analogt $k = dy$. Dermed har vi skrivemåden

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy,$$

eller

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

hvor (x_0, y_0) er underforstået.

Sammenhængen mellem funktionstilvækst og differential bliver

$$\Delta f(h, k) = df(h, k) + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \;\text{[3]}.$$

For passende små værdier af afstanden $\sqrt{h^2 + k^2}$ kan $\Delta f(h, k)$ approksimeres af $df(h, k)$.

Også her ses, at differentiabilitet i et punkt medfører kontinuitet i punktet, idet $\Delta f(h, k) \to 0$ for $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$. Skrevet helt ud har vi

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \to f(x_0, y_0) \quad \text{for } \sqrt{h^2 + k^2} \to 0.$$

[3] $\varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$ kan alternativt skrives $o(\sqrt{h^2 + k^2})$.

3 Afledede funktioner

Hvis $f : D \to \mathbb{R}$ er differentiabel i alle punkter i definitionsmængden eller i en delmængder af denne, definerer vi – når f er en funktion af én reel variabel – den afledede funktion $f'(x)$ eller – når f er en funktion af to reelle variable – de partielle afledede funktioner $f_x(x,y)$ og $f_y(x,y)$.

4 En sætning

For en forelagt funktion af to reelle variable kan det være besværligt at skulle benytte definitionen til at afgøre, om funktionen er differentiabel. Den følgende sætning kan imidlertid afklare spørgsmålet for stort set alle almindeligt forekommende funktioner.

Sætning. *Hvis f_x og f_y eksisterer i en omegn af (x_0, y_0), og f_x og f_y er kontinuerte i (x_0, y_0), så er f differentiabel i (x_0, y_0).*

Bemærk, at sætningen kun angiver en tilstrækkelig betingelse for differentiabilitet. Der findes (sære) funktioner, som ikke opfylder forudsætningerne, og som alligevel er differentiable.

Bevis. Der gælder, at

$$\begin{aligned}\Delta f(h,k) &= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) \\ &= f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) + f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0+h,y_0).\end{aligned}$$

Vi har lagt $f(x_0+h,y_0)$ til og trukket fra igen. På funktionen $f(x_0+h,y_0)$, som kun afhænger af h, kan vi benytte middelværdisætningen. Vi får

$$f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) = f_x(\xi, y_0)h,$$

hvor ξ ligger mellem x_0 og x_0+h. Ligeledes kan vi benytte middelværdisætningen på funktionen $f(x_0+h, y_0+k)$ med fastholdt h, hvorved

$$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0+h,y_0) = f_y(x_0+h,\eta)k,$$

hvor η ligger mellem y_0 og y_0+k. Vi har nu

$$\Delta f(h,k) = f_x(\xi,y_0)h + f_y(x_0+h,\eta)k.$$

Igen lægger vi til og trækker fra:

$$\begin{aligned}\Delta f(h,k) = {} & f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k \\ & + \big(f_x(\xi,y_0) - f_x(x_0,y_0)\big)h + \big(f_y(x_0+h,\eta) - f_y(x_0,y_0)\big)k.\end{aligned}$$

Idet $(\xi, y_0) \to (x_0,y_0)$ for $(h,k) \to (0,0)$ og $(x_0+h,\eta) \to (x_0,y_0)$ for $(h,k) \to (0,0)$, samt at f_x og f_y er forudsat kontinuerte i (x_0,y_0), gælder

$$\begin{aligned} f_x(\xi,y_0) - f_x(x_0,y_0) &\to 0 \text{ for } h \to 0, \\ f_y(x_0+h,\eta) - f_y(x_0,y_0) &\to 0 \text{ for } \sqrt{h^2+k^2} \to 0.\end{aligned}$$

Begge udtryk er altså epsilonfunktioner, dvs.

$$\begin{aligned}\Delta f(h,k) &= f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k + \varepsilon_1(h)h + \varepsilon_2(h,k)k \\ &= f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k \\ &\qquad + \left(\varepsilon_1(h)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + \varepsilon_2(h,k)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)\sqrt{h^2+k^2} \\ &= f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2},\end{aligned}$$

hvoraf ses, at f er differentiabel i (x_0, y_0). □

5 Funktioner af flere reelle variable

Både definition af differentiabilitet og ovenstående sætning om differentiabilitet kan umiddelbart generaliseres til at gælde for funktioner af n reelle variable.

Med benyttelse af vektornotation kan funktionstilvæksten med udgangspunkt i $\boldsymbol{x}_0$ og tilvækst $\boldsymbol{h}$ skrives

$$\Delta f(\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0).$$

Differentiabilitet i $\boldsymbol{x}_0$:

$$f \text{ er differentiabel i } \boldsymbol{x}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n : \ \Delta f(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{h} + \varepsilon(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\| \ ^{4)}.$$

Det indses, jf. afsnit 2, at

$$a_j = f_{x_j}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

De partielle afledede i $\boldsymbol{x}_0$ udgør komponenterne i en vektor, som betegnes ∇f (udtales nabla f), altså

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

Differentialet af f med udgangspunkt $\boldsymbol{x}_0$ er

$$\begin{aligned} df(\boldsymbol{h}) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0)h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)h_n \\ &= \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{h}, \end{aligned}$$

og med identifikationen $\boldsymbol{h} = d\boldsymbol{x}$ og punktet $\boldsymbol{x}_0$ underforstået kan differentialet skrives

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \\ &= \nabla f \cdot d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Sætningen i afsnit 4 om differentiabilitet kan her formuleres således: *Hvis $f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_n}$ eksisterer i en omegn af $\boldsymbol{x}_0$ og er kontinuerte i $\boldsymbol{x}_0$, så er f differentiabel i $\boldsymbol{x}_0$.*

Det ses umiddelbart, at differentiabilitet i $\boldsymbol{x}_0$ medfører kontinuitet i $\boldsymbol{x}_0$.

---

4) Alternativt $o(\|\boldsymbol{h}\|)$ for $\varepsilon(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\|$.

6 Vektorfunktioner

Betragt en vektorfunktion med m komponentfunktioner, $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, hvor alle komponentfunktionerne er funktioner af n relle variable.

$$F \text{ er differentiabel i } \boldsymbol{x}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists A \in \mathbb{R}^{m\times n}: \;\; \Delta F(\boldsymbol{h}) = A\boldsymbol{h} + \mathcal{E}(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\|.$$

Her er $\mathcal{E}(\boldsymbol{h})$ en vektorfunktion, for hvilken der gælder $\mathcal{E}(\boldsymbol{h}) \to \boldsymbol{0}$ for $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$.

Det følger, jf. afsnit 5, at

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

dvs. A er Jacobimatricen

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

hørende til F udregnet i punktet $\boldsymbol{x}_0$. Bemærk, at vektorerne ∇f_i, $i = 1, \dots, n$, indgår i Jacobimatricen som rækkevektorer.

Vektorfunktionen F er differentiabel, når alle komponentfunktionerne er differentiable.

Differentialet af F kan med benyttelse af Jacobimatricen for F udtrykkes

$$dF(\boldsymbol{h}) = DF(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{h},$$

hvor $dF(\boldsymbol{h})$ og $\boldsymbol{h}$ skal opfattes som søjlevektorer. Med punktet $\boldsymbol{x}_0$ underforstået, og med tilvæksten $\boldsymbol{h}$ identificeret med differentialet $d\boldsymbol{x}$ af den identiske afbildning i $\mathbb{R}^n$, kan differentialet af F kort skrives

$$dF = DF\,d\boldsymbol{x}.$$

Også for vektorfunktioner ses, at differentiabilitet i $\boldsymbol{x}_0$ medfører kontinuitet i $\boldsymbol{x}_0$.

7 Funktionsklasser

Det kan ofte være hensigtsmæssigt kort at kunne udtrykke, at en funktion af flere reelle variable er differentiabel med kontinuerte partielle afledede i et område D. Vi indfører derfor klassebetegnelsen $C^1(D)$ for funktioner med disse egenskaber. Den korte notation bliver $f \in C^1(D)$.

Betegnelsen $C^0(D)$ står for klassen af funktioner, der er kontinuerte i området D.

Generelt benytter vi betegnelsen $C^n(D)$ for klassen af funktioner, der er n gange differentiable med kontinuerte partielle afledede af n'te orden i området D.

31.3.2014/BR