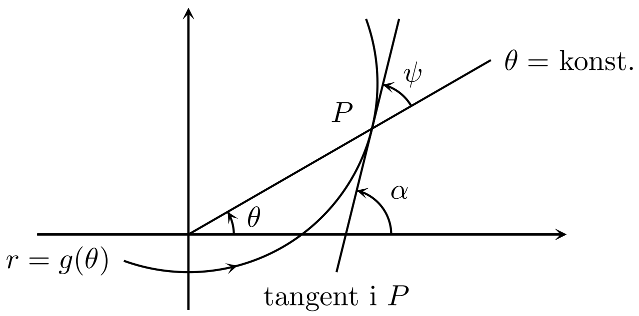
Tangenter til polære kurver

1 Formlen $\cot\psi = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$

Betragt en kurve i polære koordinater givet ved $r = g(\theta)$.



Kurven skæres af linien θ = konst. i punktet P. Vinklen fra θ = konst. til kurvens tangent i P kaldes ψ.

Benyttes θ som parameter, har vi umiddelbart en parameterfremstiling for kurven, idet

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(\theta) &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j}, \qquad r = g(\theta)\\ &= g(\theta)(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j})\\ &= g(\theta)\boldsymbol{e}(\theta).\end{aligned}$$

Kurvens tangent har retningsvektor

$$\boldsymbol{r}'(\theta) = g'(\theta)\boldsymbol{e}(\theta) + g(\theta)\boldsymbol{e}'(\theta),$$

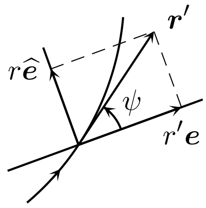
jf. Kompendium i calculus side 18 linie 5. Bemærk, at

$$\boldsymbol{e}'(\theta) = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j} = \widehat{\boldsymbol{e}}(\theta),$$

dvs.

$$\boldsymbol{r}'(\theta) = g'(\theta)\boldsymbol{e}(\theta) + g(\theta)\widehat{\boldsymbol{e}}(\theta),$$

som kort kan skrives



$$\boldsymbol{r}' = r'\boldsymbol{e} + r\widehat{\boldsymbol{e}}.$$

For ψ gælder derfor

$$\tan\psi = \frac{r}{r'},$$

eller – som formlen oftest angives –

$$\cot\psi = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}.$$

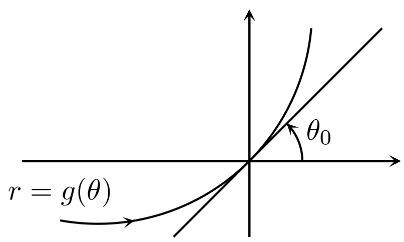
2 Hældningskoefficient

Kurvetangentens hældningskoefficient $\tan\alpha$ kan også bestemmes. Bemærk, at $\alpha = \theta + \psi$, hvorefter

$$\begin{aligned}\tan\alpha = \tan(\theta+\psi) &= \frac{\tan\theta + \tan\psi}{1 - \tan\theta\tan\psi}\\ &= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{r}{r'}}{1 - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{r}{r'}} = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}.\end{aligned}$$

3 Kurvetangent i koordinatsystemets pol

Betragt igen en kurve givet ved $r = g(\theta)$. Antag, at $g(\theta_0) = 0$.



Hvis g er en differentiabel funktion, g' er kontinuert, og $g'(\theta_0) \neq 0$, så er kurven differentiabel i $\theta = \theta_0$, og linien

$$\theta = \begin{cases}\theta_0\\ \theta_0 + \pi\end{cases}$$

er tangent til kurven i polen.

9.11.2011/BR