Variabelskift i plan- og rumintegraler

1 Jacobideterminanter

Betragt $F:\ D \to \mathbb{R}^m$, hvor $F = (f_1, \dots, f_m) \in C^1(D)$, $D \subsetneqq \mathbb{R}^n$.

De partielle afledede $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, kan naturligt arrangeres i en $m \times n$ matrix, den såkaldte Jacobimatrix.

Når $m = n$, bliver Jacobimatricen kvadratisk. Den tilhørende determinant kaldes Jacobideterminanten og noteres $J(x_1, \dots, x_n)$ eller $\dfrac{\partial\,(f_1, \dots, f_n)}{\partial\,(x_1, \dots, x_n)}$. Vi har altså

$$J(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} .$$

Når F er enentydig, kan en invers afbildning F^{-1} bestemmes. Endvidere når $J(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, gælder om Jacobideterminanterne for F og F^{-1}, at

$$J_{F^{-1}}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{J_F(x_1, \dots, x_n)}\,, \quad y_i = f_i(x_i, \dots, x_n)\,, \quad i = 1, \dots, n$$

eller med den alternative skrivemåde

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\,\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = 1\,.$$

Eksempel. Skift fra rektangulære til polære koordinater.

$$F:\ \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2\,, \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \arctan\frac{y}{x}\right) \quad ^{1)}$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

1) Betegnelsen arctan dækker over flere funktionsgrene. Fortegnskombinationen af x og y bestemmer, hvilken gren der benyttes.

Inverst koordinatskifte:

$$F^{-1}: \quad]0;\,\infty[\,\times\,[0;\,2\pi[\to \mathbb{R}^2\,, \quad (x,y) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta)$$

$$J(r,\,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Kontrol : $J(x,y)\,J(r,\,\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,r = \dfrac{1}{r}\,r = 1$

Eksempel. Skift fra rektangulære til sfæriske koordinater.

$$F:\ \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)|z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3,$$
$$(\rho,\varphi,\theta) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \arctan\frac{y}{x}\right) \quad {}^{2)}$$

Her er det regneteknisk det enkleste først at bestemme Jacobideterminanten hørende til det inverse koordinatskifte:

$$F^{-1}: \quad]0;\,\infty[\,\times\,]0;\,\pi[\,\times\,[0;\,2\pi[\to \mathbb{R}^3,$$
$$(x,y,z) = (\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi),$$

$$J(\rho,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \ \ldots\ = \rho^2\sin\varphi,$$

hvorefter

$$J(x,y,z) = \frac{1}{J(\rho,\varphi,\theta)} = \frac{1}{\rho^2\sin\varphi} = \frac{1}{(\rho\sin\varphi)\rho} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Eksempel. Betragt den lineære transformation $F:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ F(\bar{x}) = A\bar{x}$. Idet $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij},\ i,j = 1,\ \ldots,\ m$, har vi umiddelbart $J(\bar{x}) = \det A$, og for den inverse transformation $F^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F^{-1}(\bar{y}) = A^{-1}\bar{y}$, får vi $J(\bar{y}) = \det A^{-1}$.

2 Variabelskift i planintegraler

Betragt

$$\int_D f(x,y)\,dA \quad \text{samt} \quad G = (g_1,g_2):\ D \to \mathbb{R}^2,\ (u,v) = (g_1(x,y),\, g_2(x,y))\,,$$

hvor G er enentydig. Der gælder

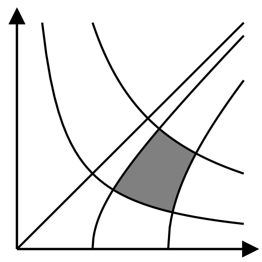
$$\int_D f(x,y)\,dA_{xy} = \int_{G(D)} f\circ G^{-1}(u,v)\,|J_{G^{-1}}(u,v)|\,dA_{uv}.$$

Bemærk, at det er den numeriske værdi af Jacobideterminanten hørende til den inverse afbildning, som indgår i formlen.

2) Se fodnote 1.

Eksempel.

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}|r|\,dr\,d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}2\pi\left[e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 1\end{aligned}$$



Eksempel. Inertimomentet mht. $(0,0)$ af et plant område D med densitet 1 beligggende i første kvadrant mellem hyperblerne $x\,y=1$, $x\,y=3$,
$x^2-y^2=1$ og $x^2-y^2=4$.

$$I_0=\int_D (x^2+y^2)\,dA$$

Sæt $u=x\,y$ og $v=x^2-y^2$, hvorefter

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} y & x\\ 2x & -2y\end{vmatrix} = -\,2y^2-2x^2=-2(x^2+y^2)\,.$$

Bemærk, at

$$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=v^2+4u^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2=\sqrt{4u^2+v^2},$$

hvorefter

$$J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}=\frac{1}{-2(x^2+y^2)}=-\frac{1}{2\sqrt{4u^2+v^2}}\,,$$

og dermed at

$$I_0=\int_1^3\int_1^4\sqrt{4u^2+v^2}\left|-\frac{1}{2\sqrt{4u^2+v^2}}\right|dv\,du=\frac{1}{2}(3-1)(4-1)=3\,.$$

3 Variabelskift i rumintegraler

Betragt

$$\int_D f(x,y,z)\,dV \quad\text{samt}\quad G=(g_1,g_2,g_s):\ D\to\mathbb{R}^3,$$
$$(u,v,w)=(g_1(x,y,z),\ g_2(x,y,z),\ g_3(x,y,z))\,,$$

hvor G er enentydig. Der gælder

$$\int_D f(x,y,z)\,dV_{xyz}=\int_{G(D)} f\circ G^{-1}(u,v,w)\,|J_{G^{-1}}(u,v,w)|\,dV_{uvw}.$$

Eksempel. Inertimomentet om z-aksen af en kugle K med radius a og densitet 1 er $I_z = \int_K (x^2 + y^2)\, dV$. Ved skift til sfæriske koordinater får vi

$$
\begin{aligned}
I_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \rho^2 \sin^2 \varphi \, \left|\rho^2 \sin \varphi\right| \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = 2\pi \int_0^{\pi} \int_0^{a} \rho^4 \sin^3 \varphi \, d\rho \, d\varphi \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \cos \varphi \right]_0^{\pi} \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^{a} = \frac{8\pi a^5}{15} \, .
\end{aligned}
$$

15.4.2011/BR