Forslag til hjemmeopgaver, som forbereder arbejdet med de nye emner den pågældende kursusgang, men primært er baseret på gymnasiepensum:

Ordinær kursusgang 1: ***Introduktion til vektorer og matricer.***
Regning med vektorer

1. Udregn $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. Bestem længden af vektorerne $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$
3. Udregn hvis det er muligt $7 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ordinær kursusgang 2: ***Matrixvektorprodukt og lineære ligningssystemer.***
Flere ligninger med flere ubekendte

1. Find skæringspunktet mellem de to linjer i planen
   l_1 : y=2x-5 og l_2 : x-3y=10
2. Find skæringspunktet mellem de tre planer i rummet
   α_1 : 2x-y+z=5, α_2 : 3x+y+2z=17 og α_3 : x+y-z=1
3. Find en parameterfremstilling for skæringslinjen mellem de to planer i rummet α_1 og α_3

Ordinær kursusgang 3: ***Gauss-elimination. Span.***
Retningsvektorer der udspænder en plan eller en linje

1. Afgør om $\begin{pmatrix} 21 \\ 16 \end{pmatrix}$ ligger på linjen gennem punktet $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ med retningsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. Afgør om $\begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ -13 \end{pmatrix}$ ligger på planen α_1 gennem $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ udspændt af retningsvektorerne $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. Afgør om $\begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ -13 \end{pmatrix}$ ligger på planen α_2 gennem $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ udspændt af retningsvektorerne $\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
4. Afgør om α_1 og α_2 er samme plan.

Ordinær kursusgang 4: ***Lineær uafhængighed.***
Mere geometri med vektorer i rummet

1. Find tal s og t, så $\begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Er der flere mulige løsninger?
2. Find tal s og t, så $\begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Er der flere mulige løsninger?
3. Find tal s, t og u, så $\begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Er der flere mulige løsninger?
4. Beskriv geometrisk ovenstående situationer.

Ordinær kursusgang 5: ***Lineære afbildninger og matrixrepræsentationer.***
Funktioner på formen $f(x) = K \cdot x$

1. Vis at funktionen $f(x) = 10 \cdot x$ opfylder $f(4+3) = f(4) + f(3)$ og $f(5 \cdot 4) = 5 \cdot f(4)$.

2. Vis at alle funktioner med en forskrift på formen $f(x) = K \cdot x$ opfylder $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ og $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$.

3. Vis at alle funktioner med en forskrift på formen $f(x) = K \cdot x$ opfylder $f(c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2) = c_1 \cdot f(x_1) + c_2 \cdot f(x_2)$.

Ordinær kursusgang 6: ***Multiplikation af matricer, sammensætning af lineære afbildninger.***
Sammensætning af afbildninger

1. Bestem en forskrift for den sammensatte afbildning $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ for funktionerne $f(x) = 2x + 7$ og $g(x) = 3x - 5$.

2. Bestem en forskrift for den sammensatte afbildning $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ for funktionerne $f(x) = 5 \cdot 4^x$ og $g(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$.

3. Bestem en forskrift for den sammensatte afbildning $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ for funktionerne $f(x) = 3 \cdot x^2$ og $g(x) = 10 \cdot x^{1{,}5}$.

4. Vil sammensætningen af to funktioner som begge har en forskrift på formen $ax + b$, $b \cdot a^x$ eller $b \cdot x^a$ også altid have en forskrift på samme form?

Ordinær kursusgang 7: ***Inverterbare matricer og invertible lineære transformationer.***
Inverse afbildninger

Funktionen $f(x)=x^2$ er ikke injektiv, da f.eks. både $f(3)$ og $f(-3)$ er 9, så to forskellige x-værdier giver ikke nødvendigvis to forskellige funktionsværdier. Funktionen har derfor ikke en invers funktion, da man fra funktionsværdien 9 ikke kan finde tilbage til en entydig x-værdi. Når man sædvanligvis siger, at $f(x)=\sqrt{x}$ er den inverse funktion til $f(x)=x^2$ er det derfor funktionen $f(x)=x^2, x\geq 0$ man mener. Den er nu injektiv og med taleksemplet er -3 nu ikke med i definitionsmængden, så fra funktionsværdien 9 kan man finde tilbage til x-værdien 3 med den inverse funktion $f(x)=\sqrt{x}$. For $x\geq 0$ har vi $\sqrt{x^2}=(\sqrt{x})^2=x$ som udtrykker at $f(f^{-1}(x))=x$ og $f^{-1}(f(x))=x$.

1. Vis at funktionen $f(x)=2x+10$ har den inverse funktion $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-5$.

2. Betragt funktionen $f(x)=(x-3)^2$. Vælg en definitionsmængde for funktionen hvorpå den er injektiv. Angiv den tilhørende værdimængde og bestem en forskrift for dens inverse funktion defineret på denne værdimængde.

Ordinær kursusgang 8: ***Determinanter***

1. Betragt punkterne A(2,1), B(3,7) og C(5,3) i planen. Udregn determinanten af vektorparret $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Bestem herudfra arealet af trekant ABC.

2. Betragt de 2 linjer i planen givet ved $l_1:\ 5x+3y=13$ og $l_2:\ -2x+9y=5$. Skæringspunktet mellem de to linjer kan findes ved at løse vektorligningen
$$x\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\5\end{pmatrix}.$$
   a) Find x ved at tage skalarprodukt med tværvektoren til $\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$ på begge sider af lighedstegnet og derefter isolere x.
   b) Find på tilsvarende vis y og angiv derefter ligningssystemets løsning (x,y).
   c) Udregn ligningssystemets determinant $\begin{vmatrix}5 & 3\\-2 & 9\end{vmatrix}$.

3. Betragt de 2 linjer i planen givet ved $l_1:\ a_1x+b_1y=c_1$ og $l_2:\ a_2x+b_2y=c_2$. Vis at de to linjer er parallelle eller sammenfaldende netop når ligningssystemets determinant er 0.

Ordinær kursusgang 9: ***Underrum, basis for underrum***

1. Betragt linjen ℓ og planen α i rummet givet ved

$$\ell: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \alpha:\ 5x + 2y - 3z = 0.$$

   a) Vis at punktet (0,0,0) ligger både på linjen ℓ og i planen α.
   b) Bestem parameterfremstillinger for linjen ℓ og planen α på formen

$$\ell: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \alpha: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

2. Betragt mængden i rummet givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 19 \\ 24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 22 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 25 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

   a) Vis at de tre retningsvektorer ligger i samme plan gennem (0,0,0).
   b) Bestem en parameterfremstilling for mængden med kun to retningsvektorer.

3. Beskriv alle muligheder for hvordan mængder i rummet med parameterfremstillinger på formen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

   kan se ud geometrisk. Giv eksempler.

Ordinær kursusgang 10: ***Dimension, rang og nullitet***

1. Betragt funktionen $f(x,y,z)$ som til hvert punkt (x,y,z) giver en funktionsværdi, som også er en vektor:

$$\text{f(x,y,z)} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (y - 2z + 3x) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   a) Redegør for at mængden af punkter med funktionsværdi lig nulvektoren udgør en linje gennem (0,0,0) og bestem en parameterfremstilling for linjen.
   b) Redegør for at værdimængden for f udgør en plan gennem (0,0,0) og bestem en parameterfremstilling for den på formen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Ordinær kursusgang 11: ***Koordinatsystemer***

1. Betragt vektorligningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   a) Opfat vektorligningen som to ligninger med to ubekendte og bestem s udtrykt ved x og y og tilsvarende t udtrykt ved x og y.
   b) Opskriv svaret fra a) som en vektorligning

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

2. Hvis de to vektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ i opgave 1 ændres til andre vektorer vil opgaven ofte men ikke altid kunne løses alligevel. Giv et eksempel, hvor opgaven så ikke kan løses, og forklar, hvordan de to vektorer så skal ligge i forhold til hinanden.